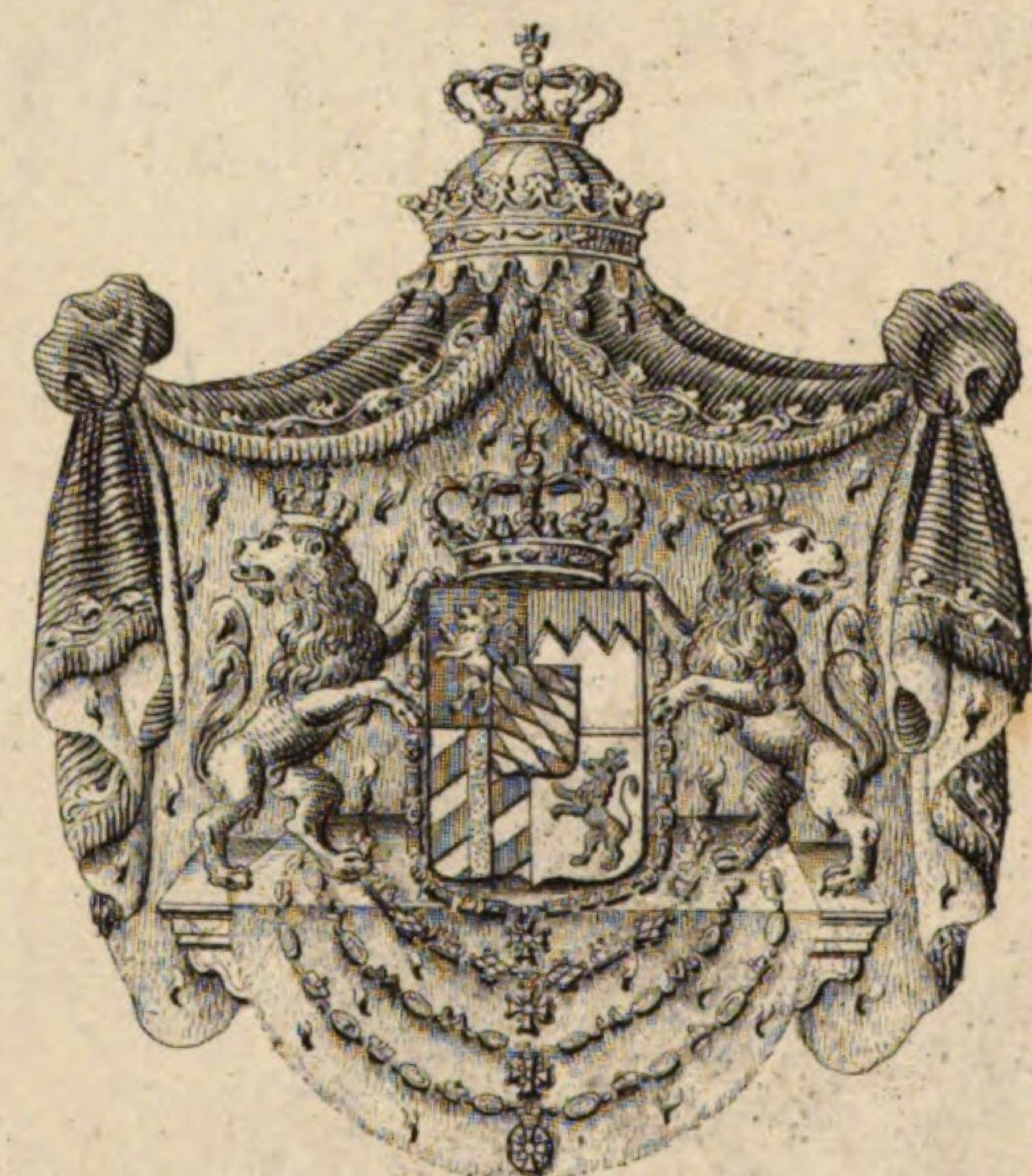
4° Astr. U.
27 s (2

Bessel



BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

<36616498630015
<36616498630015
Bayer. Staatsbibliothek

ASTRONOMISCHE

UNTERSUCHUNGEN

VON

FRIEDRICH WILHELM BESSEL.

ZWEITER BAND.

KÖNIGSBERG IN PR. 1842.

IM VERLAGE DER GEBRÜDER BORNTRÄGER.

214. D

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Gedruckt bei E. J. Dalkowski in Königsberg in Pr.

Dieser zweite Band der *Astronomischen Untersuchungen* enthält sechs Abhandlungen. In der Reihefolge der mit dem ersten Bande anfangenden Zählung ist die erste davon die *neunte*, die letzte die *vierzehnte*. Die Einleitungen, welche einigen derselben nöthig schienen, habe ich ihnen vorgesetzt, so dass ich hier nur Weniges über sie zu sagen habe.

Die *neunte* Abhandlung enthält die Bestimmung der Masse des Jupiter und erscheint hier zum ersten Male. Die *zehnte* ist der Analyse der Finsternisse gewidmet. Sie zerfällt in vier Abschnitte, deren erster, welcher die zum Grunde zu legende Bedingung entwickelt, seinem wesentlichen Inhalte nach, schon im Jahre 1836, in № 321 der *Astronomischen Nachrichten* bekannt geworden ist; der zweite, welcher die Analyse der Finsternisse für die Erde im Allgemeinen enthält, ist ganz neu; der dritte bezieht die Erscheinung auf *gegebene* Örter der Erde, in welcher Beziehung ich, in № 145 der *Astron. Nachr.*, schon einmal davon gehandelt habe; der vierte ist der Anwendung der Beobachtungen der Finsternisse gewidmet, und ein Theil seines Inhalts ist schon durch № 151 der *Astr. Nachr.* bekannt geworden.

Die beiden eben erwähnten Abhandlungen füllen mehr als dreiviertel des Bandes. Den Raum der noch zu meiner Verfügung blieb, habe ich grösstentheils zur Mittheilung von Aufsätzen benutzt, welche sich auf die Finsternisse beziehen und dadurch den Gegenstand der *zehnten* Abhandlung, berühren. Die *eilfte* giebt ein Hülfsmittel zur Eleichterung der Beobachtungen der Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen, welches schon in

№ 371 der *Astr. Nachr.* bekannt geworden ist. Die *zwölfte* liefert, durch die in Königsberg gemachte Beobachtung eines Durchganges des Mercur durch die Sonnenscheibe, einen Beitrag zur Kenntniss der *Irradiation;* sie ist schon in № 228 der *Astr. Nachr.* erschienen, allein jetzt, nach Beendigung der (in der II. Abhandl. des ersten Bandes dargestellten) Untersuchungen über das Königsberger Heliometer, konnten die Beobachtungen genauer reducirt werden, was hier geschehen ist. Die *dreizehnte* betrifft die Beobachtung einer in Königsberg fast ringförmigen Sonnenfinsterniss, wodurch eine Eigenthümlichkeit des Sonnenrandes bekannt geworden ist, welche kennen zu lernen man früher weniger gute Gelegenheit hatte; sie ist in № 320 der *Astron. Nachr.* schon gedruckt worden.

Die *vierzehnte* Abhandlung enthält eine neue Berechnungsart für die den Seefahrern nützliche Methode der Längenbestimmung durch Monds-Distanzen; sie soll zeigen, wie beträchtliche Aufopferungen an Genauigkeit, durch welche man Leichtigkeit der Rechnung herbeizuführen gesucht hat, vermieden werden können, ohne die Arbeit wesentlich zu vermehren. Neu war die hier entwickelte Behandlung der Aufgabe im Jahre 1832, wo ich sie in № 218 der *Astr. Nachr.* erscheinen liess.

Die früher schon bekannt gewordenen Theile des Inhalts dieses Bandes haben hier sämmtlich einige Änderungen erfahren.

Königsberg, den 13. October 1842.

F. W. Bessel.

Inhalt.

Seite.

IX. Bestimmung der Masse des Jupiter 1

X. Analyse der Finsternisse . 95

Erster Abschnitt. Grundgleichung der Analyse der Finsternisse . . . 106

Zweiter Abschnitt. Analyse der Finsternisse für die Erde im Allgemeinen 119

Dritter Abschnitt. Berechnung der Finsternisse für jeden gegebenen Ort der Erde 202

Vierter Abschnitt. Anwendung der Beobachtungen der Finsternisse . . 215

XI. Ein Hülfsmittel zur Erleichterung der Beobachtungen der Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen 241

XII. Beobachtung des Durchganges des Mercur durch die Sonne, am 4—5. May 1832. 244

XIII. Beobachtung der Sonnenfinsterniss am 15. May 1836. 256

XIV. Neue Berechnungsart für die Methode der Entfernungen des Mondes von anderen Himmelskörpern 266

IX.

Bestimmung der Masse des Jupiter.

Die von *Newton* herbeigeführte Nothwendigkeit, die *Massen* der Planeten kennen zu lernen, hat, seit *seiner* Zeit, eine Reihe von Bemühungen erzeugt, von welchen ich die auf die Erfindung der Masse des Jupiter gerichteten, hier erwähnen werde, ehe ich meine eigenen, desselben Zweckes wegen unternommenen, darstelle. Die Masse welche Einfluss auf die Bewegungen im Planetensysteme ausübt, ist, schärfer genommen, nicht die Masse des Jupiter allein, sondern die Summe dieser Masse und der Massen seiner vier Satelliten; um kürzer von ihr reden zu können, werde ich sie, in Theilen der Masse der Sonne ausgedrückt, durch $\frac{1}{\mu}$ bezeichnen.

Es ist bekannt, dass *Newton* die mittlere Entfernung des Satelliten IV, in den früheren Ausgaben seines unsterblichen Werkes *), nach einer von *Halley* auf Austritte des Jupiter und seiner Satelliten aus dem dunkelen Rande des Mondes gegründeten Bestimmung, $= 501''{,}5$ annahm und daraus $\mu = 1033$ berechnete; ferner, dass er, in der späteren Ausgabe **), den Beobachtungen zufolge, welche *Pound*, mit einem, an einem Fernrohre von 15 Fuss Länge angebrachten Mikrometer gemacht hatte, die mittlere Entfernung des Satelliten IV $= 496''$ setzte und daraus $\mu = 1067$ ableitete. Er führt zugleich an, dass *Pound*,

*) Editio II. Cantabrigiae MDCCXIII.

**) Londini. MDCCXXVI.

durch ein an einem Fernrohre von 123 Fuss Länge angebrachtes Mikrometer, die mittlere Entfernung des Satelliten III = 282″ bestimmte. Ich habe beide Bestimmungen berechnet, indem ich die Abplattung des Jupiter und die Massen seiner Satelliten so angenommen habe, wie Herr *Damoiseau* sie gefunden hat *), und es hat sich dadurch

Sat. III $\mu = 1066{,}15$
 - IV $\mu = 1066{,}02$

ergeben. Die Übereinstimmung beider Resultate lässt nichts zu wünschen übrig; vielmehr ist sie so gross, dass *Pounds* rühmlich bekannte Sorgfalt sich darin von dem Zufalle begünstigt zeigt. Indessen kann Sorgfalt in der Beobachtung der Satelliten nur dann die Richtigkeit der Bestimmung von μ zur Folge haben, wenn ein anderer, eben so wesentlicher Theil ihrer Untersuchung, nämlich die Bestimmung des Verhältnisses der unmittelbaren Angaben des Mikrometers zu Theilen des grössten Kreises, mit nicht geringerer ausgeführt worden ist. Wenn der angenommene Werth dieses Verhältnisses in $1+k$ multiplicirt werden muss um der wahre zu werden, so werden dadurch alle gemessenen Entfernungen im Verhältnisse $1:1+k$, und μ im Verhältnisse $(1+k)^3:1$ geändert, ohne dass die Übereinstimmung der aus den Messungen der Entfernungen verschiedener Satelliten hervorgehenden Werthe dieser Grösse dadurch beeinträchtigt wird. Es scheint nichts bis auf uns gekommen zu sein, was zu einem Urtheile über den Grad des Genügens dieses zweiten, wesentlichen Theils der *Pound*schen Bemühungen führen könnte; will man aber ein Urtheil, auf die Vergleichung der angeführten Werthe von μ mit dem Resultate meiner Beobachtungen gründen, so findet man, dass *Pound* den Werth der Angaben seines Mikrometers im Verhältnisse 174 : 175 zu klein angenommen hat.

In den Jahren 1794 und 1795 benutzte *Triesnecker* ein Dollondsches Objectivmikrometer, um eine Reihe von Messungen der Entfernungen aller vier Jupiterssatelliten zu machen. Die Nachricht davon findet sich in den Wiener Ephemeriden für 1797. Sie bewährt den Fleiss, welcher die Arbeiten dieses tüchtigen Astronomen nicht selten vor anderen, gleichzeitigen hervortreten lässt. Die grössten Digressionen jedes der

*) Tables écliptiques des Satellites de Jupiter. Paris 1836.

vier Satelliten wurden an 9 bis 12 Tagen, jedesmal häufig wiederholt gemessen, und die Übereinstimmung dieser Wiederholungen untereinander erregt ein günstiges Vorurtheil für die Güte des Instruments und für die Sorgfalt des Beobachters. Die daraus abgeleiteten Werthe der mittleren Entfernungen waren:

Sat. I	110″,8.	9 Beobachtungstage
- II	176,6.	10 —
- III	283,8.	12 —
- IV	498,2.	11 —

die ihnen entsprechenden Werthe von μ finde ich:

1075,36, 1069,61, 1045,99, 1051,96

und den Werth, welcher der *Summe* der vier gemessenen Entfernungen entspricht:

$$\mu = 1055{,}68$$

womit die einzelnen bis auf

$$-0'',69;\quad -0'',77;\quad +0'',87;\quad +0'',59$$

übereinstimmen. Es ist wahrscheinlich, dass eine neue Berechnung der *Triesnecker*schen Beobachtungen diese Unterschiede grossentheils verschwinden lassen würde, indem die Elemente der Bewegungen der Satelliten jetzt weit vollständiger bekannt sind als zur Zeit der früheren Berechnung. Allein das Resultat derselben würde erst einen Werth erlangen, wenn man sich von dem Genügen der Bestimmung des Verhältnisses der unmittelbaren Angaben des Mikrometers zu Theilen des grössten Kreises überzeugen könnte. Wie *Triesnecker* dieses Verhältniss gefunden hat, ist mir nicht bekannt geworden; die Hülfsmittel und Methoden der damaligen Zeit müssen aber die Erlangung einer, ein Tausentel des Ganzen nicht zweifelhaft lassenden Bestimmung, sehr schwierig gemacht haben.

Als *Laplace* die Formeln, welche die Bewegung des Saturn ausdrücken, entworfen hatte, legte *Bouvard* sie bekanntlich einer neuen Untersuchung der Elemente dieses Planeten zum Grunde, und nahm auch die Masse des Jupiter, als eine durch die Beobachtungen der Oppositionen und Quadraturen des Saturn zu bestimmende unbekannte Grösse, in diese Untersuchung auf. Er fand den Werth von $\mu = 1070{,}5$.

Laplace theilte dieses Resultat dem Institute, am 18. Sept. 1815, mit und zeigte, dass man, den Bedingungsgleichungen des Herrn *Bouvard* zufolge, 999308 gegen 1 wetten könne, dass der wahre Werth von μ nicht ausserhalb der Grenzen

$$\frac{1070,5}{1+\frac{1070,5}{106709}} \text{ und } \frac{1070,5}{1-\frac{1070,5}{106709}}$$
$$= 1059,87 \text{ und } 1081,35$$

liege. Aus dem was *Laplace*, bei dieser Gelegenheit, von den Bedingungsgleichungen anführt, geht auch das Gewicht der Bestimmung $= 57676597$ und der mittlere Fehler einer Beobachtung

$$= \pm\sqrt{\frac{31096}{123}} = \pm 15,90,$$

also der mittlere Fehler von μ

$$= \frac{\pm 1070,5 \,.\, 15,90}{\sqrt{57676597}} = \pm 2,24$$

hervor. — Diese beträchtliche, der *Bouvard*schen Bestimmung der Jupitersmasse zugeschriebene Sicherheit und ihre nahe Übereinstimmung mit dem Resultate der *Pound*schen Messungen der Entfernungen der Satelliten III und IV, rechtfertigten die Annahme, dass sie eins der am besten bekannten Elemente des Planetensystems sei. Auch blieb der Zweifel dagegen, welchen die vorher angeführten Beobachtungen *Triesneckers* hätten erregen können, unbeachtet; vielleicht weil seine Abhandlung in den Wiener Ephemeriden nicht bekannt genug geworden war, oder weil er unterlassen hatte, die Masse des Planeten aus seinen Messungen der Entfernungen der Satelliten abzuleiten, oder weil man eine genügende Nachweisung der Richtigkeit seiner Annahme des Werthes der Mikrometertheile — welche mir wenigstens nicht bekannt geworden ist — vermisste.

In dem Berliner Astr. Jahrbuche für 1826 theilte Herr *Nicolai* Untersuchungen über die Bahn der *Juno* mit, aus welchen er erkannte, dass 15, von 1804 bis 1823 beobachtete Gegenscheine, durch die Annahme der aus der *Bouvard*schen Masse des Jupiter folgenden Störungen der Bewegung des untersuchten Planeten, nicht miteinander vereinigt werden

konnten; dass sie aber durch eine beträchtliche Vergrösserung dieser Masse, nämlich

$$\mu = 1053{,}924$$

insoweit in Übereinstimmung gebracht wurden, dass man die noch übrigbleibenden Unterschiede wohl den, in der Rechnung noch vernachlässigten, Einwirkungen des Mars und Saturn zuschreiben konnte. Er sagt bei dieser Gelegenheit, dass diese grössere Masse des Jupiter, sich derjenigen sehr nähere, welche *Gauss* früher schon aus der Pallastheorie hergeleitet hatte, welche aber nicht näher bekannt geworden ist.

Eine Untersuchung von *Encke*, über 14 zwischen 1807 und 1825 beobachtete Gegenscheine der *Vesta*, welche in den Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften für 1826 bekannt geworden ist, bringt diese Beobachtungen durch die Annahme

$$\mu = 1050{,}36$$

in eine nichts zu wünschen übrig lassende Übereinstimmung; in eine weit grössere, als die in dem vorher erwähnten Falle der Juno erlangte ist. Indessen war der Einfluss der Masse des Jupiter auf die Übereinstimmung der 14 Gegenscheine der Vesta zwar gross genug, um nicht zweifelhaft zu lassen, dass der von Herrn *Bouvard* gefundene Werth dieser Masse beträchtlich vergrössert werden muss, wenn er die Bewegung der Vesta erklären soll; allein er war nicht so gross, dass dadurch über einige Einheiten des Werthes von μ entschieden werden konnte. Von ähnlicher Bedeutung für die Masse des Jupiter werden auch die Resultate der vorher erwähnten Untersuchungen der Bewegungen der Juno und Pallas ausgefallen sein: *längere* Zeit muss die Einflüsse des Jupiter auf alle diese Bewegungen deutlicher entwickeln, ehe die darauf gegründete Bestimmung seiner Masse in weit engere Grenzen der Unsicherheit eingeschlossen werden kann.

Als Herr *Bouvard* die vorhandenen Beobachtungen des *Uranus* untersuchte, um daraus die Elemente abzuleiten, welche seinen, im Jahre 1821 erschienenen Tafeln zum Grunde gelegt werden sollten, bemerkte er eine Erscheinung, welche bis dahin nicht, oder wenigstens nicht so augenfällig, in den Bewegungen des Planetensystems hervorgetreten war: die Beobachtungen konnten nicht durch die Formeln für die

Bewegung des Uranus erklärt werden, welche *Laplace*, durch die, alle bekannten Körper des Sonnensystems berücksichtigende Verfolgung des *Newton*schen Gesetzes der Schwere erlangt hatte. Herr *Bouvard* scheint sich, in der Einleitung seiner Tafeln *), zu der Meinung zu neigen, dass diese Abweichung zwischen der Theorie und den Beobachtungen, durch Unvollkommenheiten derjenigen der letzteren, welche vor der Zeit der *Herschel*schen Entdeckung des Planeten zufällig gemacht worden sind, erklärt werden könne. Allein wenn man diese Beobachtungen aufmerksam untersucht, so erlangt man die Überzeugung, dass sie, wenn auch um einige Secunden, doch bei weitem nicht so viel fehlerhaft sein können, als angenommen werden müsste, wenn die übrigbleibende Abweichung zwischen ihnen und der Theorie ihnen allein zugeschrieben werden sollte. Ich hielt daher die Bemerkung dieser Abweichung für eine der wichtigsten Bemerkungen, welche die practische Astronomie neuerlich herbeigeführt hat, und wurde dadurch zu einer Untersuchung veranlasst, von welcher ich, in einem folgenden Bande dieses Buches, Einiges bekannt machen zu können hoffe. Eine der von mir versuchten Erklärungen war die Annahme einer der Masse nicht proportionalen Anziehung, welche zwar schon von *Johann Tob. Mayer* ausgesprochen war **), deren Vereinbarkeit mit den Erfahrungssätzen, auf welche *Newton* die Voraussetzung der Proportionalität der Anziehung zu der Masse gründete, er aber nicht richtig nachgewiesen hatte, so dass die Statthaftigkeit derselben auch noch zweifelhaft geblieben war. Da ich diesen Zweifel beseitigen konnte ***), da also klar wurde, dass ein Planet eine *verschiedene* anziehende Kraft zeigen *kann*, jenachdem er sie auf verschiedene Körper äussert, so wurde nothwendig, Erscheinungen zu verfolgen, welche eine Abweichung von der *einfachsten* Voraussetzung — der *Newton*schen — falls sie vorhanden ist, an den Tag legen konnten. — Ich habe, in dieser Beziehung, nicht nur die Bewegung des *Uranus* verfolgt, sondern auch die Versuche genauer wiederholt, aus welchen *Newton* geschlossen hatte, dass alle irdischen Körper und der Mond mit gleicher Kraft von der Erde

*) Tables astr. publiées par le Bureau des Longitudes de France. Paris 1821. P. XIV.

**) Comment. Soc. Reg. Scient. Gottingensis ad A. MDCCCIV—VIII.

***) Abhandl. der Berlin. Akad. d. Wissensch. für 1824. Mathematischer Theil. S. 2—6.

angezogen werden *). Endlich habe ich, da die grosse Sicherheit, welche *Laplace* der *Bouvard*schen Bestimmung der Jupitersmasse zuschreibt und ihre dennoch stattfindende beträchtliche Verschiedenheit von den, auf die Bewegungen der Vesta, Juno und Pallas gegründeten Bestimmungen, auf einen physischen Grund des Unterschiedes zu deuten scheinen, für wünschenswerth gehalten, dass die Kräfte möglichst sicher ausgemittelt werden, mit welchen Jupiter und Saturn ihre Satelliten anziehen. — Auf die Bewegung des *Uranus* hoffe ich, wie gesagt, zurückzukommen; die Wiederholung der *Newton*schen Versuche hat nicht die leiseste Andeutung einer relativen Verschiedenheit der anziehenden Kraft der Erde ergeben; dass auch die einzelnen Satelliten des Jupiter auf eine gleiche Masse, und zwar nahe auf dieselbe führen, welche aus den Bewegungen der drei neuen Planeten abgeleitet worden ist, wird man in der folgenden Abhandlung sehen.

Eine Beobachtungsreihe, welche die Bestimmung der sich in der Bewegung des Satelliten IV zeigenden Masse des Jupiter zum Zwecke hat, hat der jetzige Königliche Astronom, Herr *Airy*, im J. 1832, in Cambridge angefangen und bis 1836, zuletzt in Greenwich, fortgesetzt. Diese Beobachtungen und die nach und nach aus ihnen gezogenen Resultate, hat Herr *Airy* der Königlichen Astronomischen Gesellschaft in London in vier Aufsätzen mitgetheilt, welche in der Sammlung der Schriften dieser Gesellschaft **) erschienen sind. Die Beobachtungen wurden in der Nähe der grössten Digressionen des Satelliten, mit den Aequatorealinstrumenten der beiden Sternwarten gemacht. Sie beabsichtigten die Erfindung der Unterschiede der Geradenaufsteigung des Satelliten und beider Ränder des Planeten; sie wurden an 35 Tagen, an jedem durch 24 bis 36 einzelne Durchgänge durch einen Faden, wiederholt. Dass nichts versäumt wurde, was ihr Resultat von dem Einflusse des einen, oder anderen zweifelhaften Elements befreien konnte, darf ich hier nicht weiter ausführen, da sie von einem sorgfältigen und einsichtsvollen Astronomen gemacht worden sind; die einzelnen, aus ihnen gezogenen Resultate werde ich aber hiehersetzen. Von 12 Beobachtungen

*) Abhandl. der Berlin. Akad. der Wissensch. für 1830.

**) Band VI, VIII, IX, X.

des ersten Jahres (1832) hat Herr *Airy* 2 ausgeschlossen; die übrigen haben ergeben:

10 Beobb. von 1832	$\mu = 1048{,}70$
6 —. 1833	1047,68
5 —. 1834	1048,84
12 —. 1835 und 36	1045,29

In der Berechnung der Beobachtungen von 1832 ist der Einfluss der Strahlenbrechung vernachlässigt worden, und Herr *Airy* bemerkt, dass ihre Berücksichtigung den Werth von μ vergrössern würde. Die Ursache der im Ganzen stattfindenden Verminderung der nach und nach erhaltenen Werthe von μ, sucht er in einem kleinen Fehler der aus der *Laplace*schen Theorie des Satelliten entlehnten Neigung der Ebene seiner Bahn beziehungsweise auf die Ebene des Erdaequators. Um das Resultat aller Beobachtungen zu erhalten, setzt er das Gewicht der aus den Beobachtungen der einzelnen Jahre gezogenen Resultate, einer, auf die Berücksichtigung verschiedenartiger Umstände gegründeten Schätzung gemäss, resp. = 2, 2, 3, 8 und findet dadurch endlich:

$$\mu = 1046{,}77.$$

Obgleich eine neue Berechnung dieser Beobachtungen und die vollständige Entwickelung des Einflusses der Lage der Ebene der Satellitenbahn auf ihr Resultat, wünschenswerth erscheinen, so kann man seine sehr nahe Richtigkeit doch nicht bezweifeln. Wenn, nach der Bekanntmachung des Resultats des Herrn *Airy*, noch andere Beobachtungen der Jupiterssatelliten, in Beziehung auf die Erfindung von μ, ein Interesse haben sollen, so kann es nicht mehr in einer beträchtlichen Verbesserung des aus den ersteren abgeleiteten Werthes, sondern nur in ihrer Ausdehnung auf alle vier Satelliten, und in der Anwendung von Beobachtungsmitteln, welche noch grössere Sicherheit verheissen als die Aequatorealinstrumente, gesucht werden.

Auch Herr *Santini* in Padua hat, an 16 Tagen des Jahrs 1835, eine Reihe von Messungen der Entfernung des Satelliten IV von beiden Rändern des Jupiter gemacht, und das daraus gezogene Resultat, nämlich

$$\mu = 1051{,}9$$

in dem XXI. Theile der Schriften der Gesellschaft der Wissenschaften

in Modena, mit allen Einzelnheiten der Untersuchung, bekannt gemacht. Zu den Beobachtungen wurde ein Mikrometer von *Amici* angewandt, welches aus einer durchschnittenen, zwischen dem Objective und dem Oculare des Fernrohrs angebrachten Linse besteht, also, wie das Heliometer, auf dem Principe der Verdoppelung der Bilder beruhet. Die Anwendung eines solchen Mikrometers ist auf weit kleinere Winkel beschränkt als die des Heliometers, wesshalb die Bestimmung des Verhältnisses seiner unmittelbaren Angaben zu Theilen des grössten Kreises, auch nur mit geringerer Sicherheit erlangt werden kann. Dieses ist von geringem Nachtheile für die Messung sehr kleiner Entfernungen; allein es führt grosse Schwierigkeiten herbei, wenn Entfernungen, welche sich der Grenze der mit dem Instrumente messbaren nähern, mit grösserer Sicherheit gemessen werden sollen, als andere Apparate gewähren, deren Angabe ähnlich grosser Winkel die Grundlage der Bestimmung des Verhältnisses ist. Herr *Santini* theilt die Messungen mit, wodurch er den von dem Verfertiger des Instruments näherungsweise angenommenen Werth dieses Verhältnisses geprüft hat; allein die Kleinheit der gemessenen Winkel, deren grösster = 516,″5 ist, berechtigt nicht zu der Erwartung, dass dadurch eine, bis auf ein Tausentel des Ganzen gehende Unsicherheit entfernt worden wäre. Ein Mikrometer von der Art des von Herrn *Santini* angewandten, scheint erst in Folge sehr schwieriger Untersuchungen über den in Secunden des grössten Kreises ausgedrückten Werth seiner Angaben, der Bestimmung der mittleren Entfernung des Satelliten IV des Jupiter eine Sicherheit gewähren zu können, welche der gleich ist, die man durch die von Herrn *Airy* angewandte, die Zeit zum Maasse machende Methode erlangen kann.

Meine eigenen, der folgenden Untersuchung zum Grunde liegenden Beobachtungen der Jupiterssatelliten, sind von der Ansicht veranlasst worden, dass es wesentlich ist, zur Messung *kleiner* Entfernungen an der Himmelskugel ein Instrument anzuwenden, dessen Beschränkung auf solche Anwendungen den Vortheil seiner grösseren Genauigkeit hervorbringt. Der Wunsch, den Theil der Astronomie, welcher von der relativen Beobachtung einander naher Punkte an der Himmelskugel ausgehen muss, wieder in die Stellung zu anderen ihrer Theile zu versetzen, welche er nie hätte verlieren sollen, war der Anlass zur

Erwerbung des grossen *Heliometers*, welches die Königsberger Sternwarte ziert; und unter den Gegenständen, zu deren Beobachtung es angewandt werden sollte, nehmen die Satelliten des Saturns und des Jupiters einen vorzüglichen Platz ein. Ich fing daher die Beobachtungen der ersteren gleich nach der Aufstellung des Instruments, im Jahre 1830 an; die der letzteren im Jahre 1832. *Nach* dem gemachten Versuche dieser Anwendungen, bezweifle ich eben so wenig als *vor* demselben, dass die grösste Vollständigkeit und Sicherheit aller ähnlichen Beobachtungen, wenigstens bis jetzt, nur durch die Anwendung eines solchen Instruments erlangt werden kann.

Um indessen den Vortheil, welchen die Genauigkeit der einzelnen Beobachtungen gewährte, auch dem Endresultate der Untersuchung aneignen zu können, wurde nothwendig, der Bestimmung der Reductionselemente der Messungen eine jener Genauigkeit angemessene Sicherheit zu geben. Hierdurch wurden die Vorarbeiten erforderlich, welche der erste Band dieses Werks enthält. Ich glaube den Einfluss der Unsicherheit, welche, nach diesen Vorarbeiten, in den Reductionen der Beobachtungen noch übrig bleiben mag, nicht grösser als einige Zehntel einer Einheit des Werthes von μ schätzen zu dürfen.

1.

Meine Beobachtungen der Jupiters-Satelliten wurden durch die Aussicht veranlasst, durch das *Heliometer* der Königsberger Sternwarte eine Sicherheit erlangen zu können, welche, in Beziehung auf die Bestimmung der *Masse* des ganzen Jupiterssystems, nichts Wesentliches zu wünschen übriglassen würde. An ihrem Anfange, im J. 1832, beabsichtigte ich, die Entfernungen der Satelliten von dem Planeten, nur in der Nähe ihrer Maxima zu messen. Allein wenn auch auf diese Zeiten beschränkte Beobachtungen den Vortheil gewähren, am wenigsten abhängig von der Kenntniss der Elemente der Bewegungen der Satelliten, zur Erfindung der gesuchten mittleren Entfernungen zu führen, so wurde doch bald klar, dass es vortheilhafter sein würde, jede Beschränkung aufzugeben und Messungen zu machen, immer wenn die Heiterkeit des Himmels es erlauben würde. Der unsichere Zustand des Königsberger Himmels würde nämlich viele Jahre nothwendig gemacht haben, um die

gewünschte beträchtliche Zahl der Beobachtungen der grössten Elongationen jedes der Satelliten zusammenzubringen; wogegen man ungleich schneller ein genügendes Gewicht der Bestimmung der mittleren Entfernungen erwarten durfte, wenn man die Satelliten, ohne Rücksicht auf ihre Stellung gegen den Planeten, beobachtete und dadurch nichtsowohl die unmittelbare Vermeidung der Einflüsse mangelhaft bekannter Elemente ihrer Bewegungen, als die Elimination derselben aus dem letzten Resultate, suchte. Dieser Ansicht gemäss wurde der Beobachtungsplan im Jahre 1833 erweitert; allein 1834 erweiterte ich ihn noch mehr, indem ich ihn auch auf die Positionswinkel ausdehnte, welche zwar keinen Beitrag zu der Bestimmung der *Masse* des Jupitersystems liefern, aber die Sicherheit der Elimination des Einflusses der Elemente der Bewegungen der Satelliten auf ihre verlangten mittleren Entfernungen vom Jupiter vermehren können. In der letzteren Beziehung wird das was ich in dieser Abhandlung mittheilen werde, wahrscheinlich die Überzeugung hervorbringen, dass ähnliche Beobachtungen eine sicherere Bestimmung der Lage der Ebenen der Satellitenbahnen gewähren können, als die Beobachtungen der Finsternisse.

Jede meiner Messungen der Entfernung beruhet auf 8 Einstellungen der Entfernung. Während die Objectivhälfte I und das Ocular fortwährend so gestellt waren, dass ihre Axen mit der Heliometeraxe zusammenfielen, wurde die Hälfte II, nach einer oder der anderen Seite so weit entfernt und das ganze Objectiv so gedrehet, dass das von der einen Objectivhälfte gemachte Bild des zu beobachtenden Satelliten in die Mitte des von der anderen gemachten Bildes der Scheibe des Planeten gebracht wurde, so weit man nämlich diese Mitte durch blosse Schätzung beurtheilen konnte. Dann wurde die Mikrometerschraube der Objectivhälfte II angewandt, um das Bild des Satelliten erst an den einen, dann an den anderen Rand des Planeten zu bringen und gleich darauf diese Beobachtungen, in umgekehrter Ordnung, zu wiederholen. Dieses ist die erste Hälfte der Messung; die zweite ist ihr durchaus gleich, mit dem Unterschiede jedoch, dass zwischen beiden die Axe der Hälfte II durch die Heliometeraxe hindurch bewegt, auch die Bilder aufs Neue central gestellt wurden. Dass jede Einstellung der Mikrometerschraube abgelesen und die Zeit jeder Beobachtung

bemerkt wurde, versteht sich von selbst. Von dieser Anordnung war eine Folge, dass die arithmetischen Mittel der vier Beobachtungszeiten des einen und des anderen Randes, wenn nicht etwa Wolken oder zufällige Unterbrechungen eine Störung verursachten, stets bis auf einen, meistens kleinen, Bruch einer Minute zusammentrafen.

Wenn auch der Positionswinkel beobachtet wurde, wurde, meistens nach der Beendigung der ersten Hälfte der Messung der Entfernung und vor dem Anfange der zweiten, das Bild des Satelliten, durch Drehung des ganzen Objectivs, aus seiner centralen Stellung, an den nördlichen, dann an den südlichen Rand der Scheibe des Planeten gebracht, welches in jeder der beiden Stellungen der Objectivhälfte II nur einmal geschah; so dass auch jede Beobachtung des Positionswinkels nur auf 4, nicht wie die Messung der Entfernung auf 8, Einstellungen und Ablesungen des Instruments beruhet.

Die Art der Reduction der gemachten Beobachtungen und die Elemente worauf sie beruhet, habe ich in der *zweiten* Abhandlung des *ersten Bandes* dieses Werks so vollständig mitgetheilt, dass hier nichts weiter davon gesagt zu werden braucht. Der Einfluss der Strahlenbrechung ist nach den Formeln des 6[ten] §'s der *dritten* Abhandlung und den ihr angehängten Tafeln berechnet; der Einfluss der unvollständigen Erleuchtung der Planetenscheibe nach den in der *sechsten* Abhandlung §. 13 gegebenen Vorschriften. — In der folgenden Zusammenstellung der Beobachtungen ist die in Windungen der Schraube angegebene Entfernung schon von der periodischen Ungleichheit (Abh. II. S. 148. Taf. I.) der Schraube befreiet.

2.

Messungen der Entfernungen des Satelliten I.

	Barometer.		Thrm.	St. Zeit.	Vorg. Rand.	St. Zeit.	Folg. Rand.	Position.
	L	R °	F	U ′ ″	R	U ′ ″	R	° ′
1832 Nov. 21	339,9	3°	29°	21 52 9,2	2,0096	21 52 14,2	2,8107	244 20
1833 Sept. 7	339,4	11	52,5	21 59 58,0	1,7276	21 59 37,5	2,5663	246 49
— 8	339,1	14	51	21 38 54,8	2,9404	21 39 45,3	2,0931	68 37
— 30	341,9	9	47	0 0 40,0	1,9594	0 1 7,5	2,8597	247 20
Octb. 1	341,2	8	42	0 14 36,0	3,1761	0 14 6,8	2,2741	67 7
— 2	340,2	8,7	42	23 53 7,8	2,1382	23 53 17,2	3,0351	249 1
— 3	339,7	7,5	41,5	22 58 6,5	2,7559	22 58 19,5	1,8570	70 58

		L	R	F	U ′ ″	R	U ′ ″	R	° ′
1833 Octb.	8	337,4	6°	35°	23 30 51,3	2,9114	23 30 49,7	2,0049	66 25
—	10	339,2	6	35,5	23 14 28,0	3,0891	23 14 39,3	2,1993	69 14
—	11	339,3	5	37	1 4 38,0	1,1042	1 4 48,3	2,0037	253 40
—	12	335,1	7	44	23 46 9,0	1,5363	23 46 12,8	0,6410	76 19
—	15	333,8	6	41	23 54 38,3	2,5071	23 54 55,0	1,6225	64 36
—	18	331,5	5	41,5	0 28 49,0	1,8983	0 29 0,0	2,7865	250 58
—	26	338,4	6,6	44	23 4 18,8	2,9889	23 4 30,2	2,0812	69 24
—	27	340,6	6	41	0 22 30,0	0,9740	0 22 41,2	1,8884	253 54
—	30	338,2	3,5	34	23 10 32,5	0,8197	23 10 41,3	1,7196	263 19
Nov.	4	331,1	4	33	1 12 52,8	1,4173	1 13 23,2	0,5191	75 3
—	11	340,5	2	32	1 6 55,3	2,1962	1 7 4,7	1,3058	70 54
—	16	339,0	0	29	0 16 13,3	2,9800	0 16 20,2	2,0874	66 23
—	27	338,1	2	31,3	22 49 2,3	2,4916	22 49 16,5	1,6317	69 34
—	27	338,5	0	29	2 14 8,8	1,4351	2 14 14,2	0,5703	73 57
Decb.	27	336,0	−2	22	4 24 39,5	1,7970	4 24 43,5	1,0156	70 1
1834 Febr.	3	340,2	+1,5	32	3 37 49,3	1,6864	3 38 9,0	2,3891	248 52
1835 Jan.	2	341,2	1	32	1 51 50,8	1,3638	1 51 53,7	0,5025	86 59

Die letzte Columne giebt die Richtung an, in welcher die Entfernungen des Satelliten von beiden Rändern der Scheibe des Planeten gemessen worden sind; sie ist der Berechnung der Einflüsse der Strahlenbrechung und der unvollständigen Erleuchtung zum Grunde gelegt.

Reduction der Entfernungen des Satelliten I.

			Mittl. Zeit.	Vorg. Rand.	Refr.	Folg. Rand.	Refr.	Figur.	Entfern. vom Mittelp.
			U ′ ″	″	″	″	″	″	″
1	1832	Nov. 21	5 49 31,6	106,306	+0,036	148,684	+0,050	+ 0,188	127,726
2	1833	Sept. 7	10 52 56,8	91,378	0,030	135,740	0,045	— 0,131	113,466
3		— 8	10 28 36,5	155,528	0,059	110,711	0,042	+ 0,129	133,299
4		— 30	10 23 17,1	103,641	0,030	151,262	0,043	— 0,048	127,440
5		Octb. 1	10 32 46,7	168,001	0,049	120,289	0,035	+ 0,044	144,231
6		— 2	11 7 45,3	113,100	0,033	160,542	0,046	— 0,040	136,821
7		— 3	10 8 58,0	145,775	0,049	98,227	0,031	+ 0,037	122,078
8		— 8	10 21 51,6	154,004	0,045	106,053	0,031	+ 0,021	130,088
9		— 10	9 57 45,6	163,403	0,049	116,336	0,035	+ 0,016	139,928
10		— 11	11 43 41,1	58,408	0,011	105,988	0,031	— 0,014	82,205
11		— 12	10 21 25,8	81,262	0,024	33,905	0,010	+ 0,012	57,612
12		— 15	10 18 12,4	132,615	0,038	85,823	0,024	+ 0,006	109,256
13		— 18	10 40 27,0	100,411	0,028	147,393	0,041	— 0,002	123,934
14		— 26	8 44 43,6	158,098	0,047	110,085	0,033	0,000	134,132
15		— 27	9 58 46,0	51,520	0,015	99,888	0,029	+ 0,001	75,727
16		— 30	8 35 11,3	43,359	0,012	90,961	0,026	+ 0,004	67,183

17	1833 Nov. 4	10ᵁ 17′ 42″,8	74″,971	+0″,022	27″,459	+0″,008	−0″,012	51″,218
18	— 11	9 44 4,5	116,173	0,036	69,073	0,021	−0,028	92,624
19	— 16	8 33 50,0	157,636	0,047	110,419	0,033	−0,040	134,028
20	— 27	6 23 41,8	131,800	0,046	86,313	0,030	−0,088	109,007
21	— 27	9 48 10,7	75,913	0,026	30,167	0,010	−0,087	52,971
22	Decb. 27	10 0 21,6	95,060	0,068	53,724	0,036	−0,178	74,266
23	1834 Febr. 3	6 44 22,3	89,206	0,042	126,377	0,059	+0,167	108,009
24	1835 Jan. 2	7 5 19,1	72,141	0,024	26,581	0,009	−0,085	49,293

3.

Messungen der Entfernungen des Satelliten II.

	Barometer.		Thrm.	St. Zeit.	Vorg. Rand.	St. Zeit.	Folg. Rand.	Position.
	L	R	F	U ′ ″	R	U ′ ″	R	° ′
1833 Sept. 7	339,4	11°	52,5	22 18 42,5	3,7232	22 18 57,3	4,5669	248 55
— 30	341,9	9	47	0 32 4,8	4,6901	0 32 14,0	3,7828	68 5
Octb. 2	340,2	8,7	42	23 39 27,5	3,8641	23 39 34,0	4,7666	248 55
— 12	335,1	7	44	23 33 26,5	1,9777	23 33 31,0	2,8818	243 0
— 15	333,8	6	41	0 10 38,5	1,9970	0 10 51,0	1,1035	76 52
— 18	331,5	5	41,5	0 46 14,3	4,6557	0 46 25,0	3,7705	69 7
— 19	332,2	6	43	0 6 35,8	1,3696	0 7 10,0	2,2792	240 59
— 20	334,5	7	45	0 46 2,5	3,1137	0 46 11,8	4,0225	250 58
— 26	338,4	6,6	44	23 31 52,8	0,3897	23 32 0,0	1,2904	230 10
— 27	340,6	6	41	0 35 10,8	3,5807	0 35 7,0	4,4929	249 31
— 28	340,0	5	39,5	0 4 19,3	2,8725	0 4 47,5	1,9621	61 59
— 30	338,2	3,5	34	23 23 20,8	3,1397	23 23 30,0	4,0540	245 24
Nov. 4	331,1	4	33	0 58 34,3	2,3443	0 58 56,1	1,4516	59 53
— 11	340,5	2	32	1 19 12,5	1,6368	1 19 36,8	0,7473	53 58
— 16	339,0	0	29	0 0 51,5	2,0690	0 1 14,3	1,1816	74 42
— 27	338,5	0	29	2 30 14,5	1,1129	2 30 49,3	1,9829	238 57
1834 Febr. 3	340,2	1,5	32	3 55 17,5	2,5178	3 54 52,5	3,2282	245 40

Reduction der Entfernungen des Satelliten II.

		Mittl. Zeit.	Vorg. Rand.	Refr.	Folg. Rand.	Refr.	Figur.	Entfern. vom Mittelp.
1	1833 Sept. 7	11ᵁ 11′ 55″,9	196″,933	+0″,065	241″,562	+0″,079	−0″,133	219″,187
2	— 30	11 54 27,7	248,084	0,071	200,090	0,057	+0,049	224,200
3	Octb. 2	10 54 5,8	204,394	0,059	252,132	0,073	−0,041	228,287
4	— 12	10 8 45,8	104,610	0,031	152,433	0,045	−0,011	128,549
5	— 15	10 34 8,0	105,632	0,031	58,370	0,017	+0,006	82,031
6	— 18	10 57 49,3	246,267	0,071	199,444	0,057	+0,002	222,922
7	— 19	10 14 33,1	72,445	0,021	120,559	0,035	−0,001	96,531

8	1833 Octb. 20	10ᵁ 49′ 45″,0	164″,699	0″,047	212″,770	0″,060	— 0″,001	188″,790
9	— 26	9 12 10,9	20,613	0,007	68,255	0,02	+ 0,001	44,450
10	— 27	10 11 17,2	189,404	0,055	237,657	0,069	+ 0,001	213,594
11	— 28	9 36 50,8	151,943	0,045	103,787	0,031	— 0,002	127,901
12	— 30	8 47 57,7	166,081	0,048	214,446	0,062	+ 0,004	190,332
13	Nov. 4	10 3 22,3	124,041	0,040	76,785	0,025	— 0,012	100,434
14	— 11	9 56 27,0	86,579	0,032	39,529	0,015	— 0,028	63,050
15	— 16	8 18 38,6	109,441	0,033	62,504	0,019	— 0,039	85,960
16	— 27	10 4 28,1	58,870	0,026	104,894	0,046	+ 0,087	82,005
17	1834 Febr. 3	7 1 25,4	133,185	0,063	170,763	0,081	+ 0,167	152,213

4.

Messungen der Entfernungen des Satelliten III.

	Barometer.		Thrm.	St. Zeit.	Vorg. Rand.	St. Zeit.	Folg. Rand.	Position.
	L	R	F	U ′ ″	R	U ′ ″	R	° ′
1832 Octb. 28	341,6	6°	41,5	22 15 17,5	7,0526	22 15 40,3	6,1890	64 46
1833 Sept. 6	340,4	11	48	22 51 50,5	3,8608	22 52 41,3	4,6897	253 28
— 8	339,1	11	51	21 55 19,8	5,9631	21 55 27,7	5,1254	67 21
— 27	338,8	11	51	22 20 44,8	5,8458	22 21 17,0	6,7334	250 12
— 30	341,9	9	47	0 16 26,0	7,3361	0 16 28,2	6,4428	68 55
Octb. 1	341,2	8	42	23 55 36,5	5,0751	43 55 49,8	4,1810	72 31
— 3	339,7	7,5	41,5	22 41 37,3	5,3229	22 41 38,7	6,2151	246 38
— 4	340,6	8	41	22 45 34,0	6,2087	22 45 27,8	7,1032	249 55
— 8	337,4	6	35	22 49 40,3	5,9721	22 49 52,5	5,0619	71 12
— 10	339,2	6	35,5	23 32 46,0	4,9309	23 32 50,5	5,8264	245 58
— 11	339,3	5	37	0 49 41,5	6,3658	0 47 32,3	7,2604	249 24
— 12	335,1	7	44	23 20 28,5	3,0381	23 20 45,5	3,9386	254 0
— 15	333,8	6	41	23 18 54,8	6,4788	23 19 23,2	5,5631	70 23
— 18	331,5	5	41,5	0 15 22,5	6,5639	0 15 41,0	7,4451	249 3
— 19	332,2	6	43	23 48 22,3	3,7518	23 48 34,5	4,6475	252 45
— 20	334,5	7	45	0 59 45,8	2,4279	0 59 59,7	1,5287	57 32
— 26	338,4	6,6	44	23 18 42,5	4,5499	23 18 38,3	5,4509	251 25
— 27	340,6	6	41	0 10 19,3	1,3375	0 10 35,5	0,4419	43 0
— 28	340,0	5	39,5	23 49 52,5	6,2789	23 50 11,7	5,3728	66 4
— 29	339,8	3	33,5	0 1 31,0	7,1625	0 1 49,5	6,2634	68 58
— 30	338,2	3,5	34	22 56 47,8	3,4391	22 56 59,5	2,5350	74 13
Nov. 4	331,1	4	33	0 44 5,8	5,8121	0 44 18,5	4,9201	65 20
— 11	340,5	2	32	0 53 43,3	5,1377	0 53 58,7	4,2494	64 26
— 16	339,0	0	29	23 46 21,0	5,9198	23 46 44,0	6,7946	249 2
— 27	338,1	2	31,3	22 33 22,3	6,1171	22 33 40,0	5,2570	69 16
— 27	338,5	0	29	1 57 21,8	5,6304	1 57 44,7	4,7695	69 46
Decb. 27	336,0	— 2	22	4 10 46,8	1,7465	4 11 7,5	2,5266	240 57

			L	R	F	U ′ ″	R	U ′ ″	R	° ′
1834	Febr.	3	340,2	+1,5	32°	4 10 16,3	4,1367	4 10 7,2	4,8460	249 31
	—	6	339,1	—2	22	3 38 21,0	5,7111	3 38 42,2	5,0193	68 8
	—	13	336,7	—1	26	4 29 2,3	5,5740	4 29 25,2	4,9111	68 6
	—	17	336,9	0	28	4 39 3,3	4,6867	4 39 16,5	5,3362	248 54
	—	27	336,8	5	41	5 52 11,5	5,0193	5 52 39,8	4,3443	67 34
	Octb.	11	336,3	4	44	0 41 8,5	5,5657	0 41 17,8	6,3939	261 11
	—	15	333,0	11,5	52	1 11 50,5	6,8470	1 12 47,8	5,9973	82 14
	Nov.	8	330,0	7,5	43	1 49 14,0	3,8295	1 49 22,3	4,7247	257 48
1835	Jan.	2	341,2	1	32	2 19 55,8	6,7163	2 19 51,2	5,8506	79 19
	—	8	337,5	—1	26	4 47 46,8	5,5743	4 47 57,2	4,7389	76 26
	—	12	335,3	—1,5	26	2 25 48,0	5,3402	2 26 41,0	6,3777	257 14
	—	14	333,7	—1,5	26	2 57 10,0	0,6530	2 57 23,2	1,4805	273 54
	—	15	332,9	+1	32	1 40 52,8	4,3189	1 40 54,7	3,4897	74 56
	—	21	337,2	—3	22	6 0 27,8	0,8624	6 0 28,2	1,6683	270 50
	Febr.	10	335,6	0	29	3 0 52,3	5,4137	3 0 59,2	6,1714	258 7
1839	April	2	340,3	—5	15	12 10 17,5	5,8398	12 10 22,5	6,6499	294 28
	—	3	339,4	—5	15	12 49 8,0	3,8148	12 49 28,8	4,6401	291 27
	—	12	334,4	0	28	11 59 30,3	5,1068	11 59 40,5	4,2867	116 54
	—	16	338,8	—1	23	12 25 36,3	5,4883	12 25 32,2	6,3014	295 34
	—	17	337,4	0	26	12 47 37,0	4,8943	12 47 25,3	5,7106	293 4
	—	20	337,4	5	38	12 44 27,8	6,6131	12 44 32,7	5,7950	114 35
	—	30	339,0	7,5	44	12 16 38,0	4,5948	12 16 59,5	5,4019	296 32
	May	4	335,3	9	47	12 57 47,0	6,3389	12 58 5,3	5,5361	115 23
	—	11	335,5	10	48	13 32 41,3	6,0393	13 32 50,2	5,2478	115 43
	—	15	335,0	14	61	13 20 19,0	5,5507	13 20 32,8	6,3264	294 51
	—	25	335,6	9	49	14 43 17,3	5,1764	14 43 35,0	4,4379	116 33
	Juni	1	335,6	13	56	14 42 19,0	4,5424	14 42 2,5	3,8236	117 3

Reduction der Entfernungen des Satelliten III.

				Mittl. Zeit.	Vorg. Rand.	Refr.	Folg. Rand.	Refr.	Figur.	Entfern. vom Mittelp.
				U ′ ″	″	″	″	″	″	″
1	1832	Octb.	28	7 47 6,9	373,057	+0,130	327,374	+0,114	— 0,116	350,222
2	1833	Sept.	6	11 49 12,3	204,215	0,068	248,060	0,083	— 0,134	226,079
3		—	8	10 44 37,7	315,412	0,107	271,103	0,092	+ 0,127	293,484
4		—	27	9 55 28,4	309,209	0,103	356,158	0,118	— 0,058	332,736
5		—	30	11 38 37,9	388,045	0,111	340,793	0,098	+ 0,054	364,578
6		Octb.	1	11 14 11,5	268,452	0,079	221,157	0,065	+ 0,044	244,921
7		—	3	9 52 26,7	281,560	0,085	328,755	0,099	— 0,041	305,209
8		—	4	9 52 23,0	328,419	0,104	375,734	0,119	— 0,031	352,157
9		—	8	9 40 54,2	315,909	0,101	267,761	0,085	+ 0,023	291,906
10		—	10	10 15 57,2	260,831	0,076	308,203	0,090	— 0,016	284,584
11		—	11	11 27 37,5	336,732	0,099	384,055	0,113	— 0,014	360,486
12		—	12	9 55 56,1	160,701	0,049	208,333	0,063	— 0,012	184,561

13	1833 Octb. 15	9u 42′ 40″,6	342″,705	+0″,100	294″,267	+0″,086	+ 0″,006	318″,585
14	— 18	10 27 6,4	347,206	0,098	393,819	0,111	— 0,002	370,615
15	— 19	9 56 11,6	198,463	0,057	245,832	0,070	— 0,002	222,209
16	— 20	11 3 28,4	128,423	0,041	80,860	0,026	+ 0,001	104,676
17	— 26	8 58 57,1	240,669	0,071	288,328	0,085	0,000	264,577
18	— 27	9 46 39,7	70,747	0,026	23,374	0,009	0,000	47,078
19	— 28	9 22 21,9	332,133	0,096	284,202	0,082	— 0,002	308,255
20	— 29	9 30 2,2	378,882	0,111	331,320	0,097	— 0,003	355,202
21	— 30	8 21 30,3	181,918	0,059	134,094	0,043	— 0,004	158,053
22	Nov. 4	9 48 51,7	307,446	0,093	260,262	0,079	— 0,012	283,928
23	— 11	9 30 57,6	271,774	0,087	224,784	0,072	— 0,029	248,330
24	— 16	8 4 10,6	313,149	0,092	359,426	0,106	+ 0,039	336,426
25	— 27	6 8 6,2	323,584	0,100	278,085	0,086	— 0,088	300,840
26	— 27	9 31 34,8	297,840	0,103	252,299	0,090	— 0,088	275,078
27	Decb. 27	9 46 39,5	92,389	0,065	133,656	0,094	+ 0,176	113,278
28	1834 Febr. 3	7 16 29,6	218,822	0,118	256,343	0,139	+ 0,167	237,878
29	— 6	6 33 7,0	302,118	0,145	265,520	0,128	— 0,159	283,797
30	— 13	6 56 9,4	294,860	0,176	259,853	0,155	— 0,143	277,379
31	— 17	6 50 20,3	247,910	0,151	282,278	0,172	+ 0,134	265,390
32	— 27	7 24 5,0	265,495	0,256	229,791	0,221	— 0,117	247,765
33	Octb. 11	11 21 12,1	294,402	0,191	338,210	0,219	— 0,140	316,371
34	— 15	11 36 29,4	362,167	0,133	317,222	0,117	+ 0,127	339,947
35	Nov. 8	10 39 0,5	202,563	0,063	249,916	0,078	— 0,033	226,277
36	1835 Jan. 2	7 33 15,7	355,280	0,108	309,485	0,094	— 0,087	332,397
37	— 8	9 37 14,5	294,876	0,096	250,683	0,081	— 0,102	272,766
38	— 12	7 0 16,6	293,072	0,087	337,376	0,101	+ 0,122	315,440
39	— 14	7 23 21,8	34,543	0,011	78,316	0,024	+ 0,118	56,565
40	— 15	6 3 15,5	228,460	0,069	184,597	0,056	— 0,132	206,459
41	— 21	9 58 31,8	45,620	0,015	88,252	0,030	+ 0,141	67,100
42	Febr. 10	5 40 50,7	286,376	0,084	326,458	0,096	+ 0,185	306,692
43	1839 April 2	11 28 5,3	308,934	0,168	351,790	0,191	0,000	330,542
44	— 3	12 3 1,4	201,807	0,089	245,466	0,108	0,000	223,735
45	— 12	10 38 3,4	270,143	0,150	226,760	0,125	— 0,005	248,584
46	— 16	10 48 14,5	290,329	0,140	333,343	0,161	+ 0,011	311,998
47	— 17	11 6 11,7	258,904	0,107	302,086	0,124	+ 0,013	280,624
48	— 20	10 51 23,6	349,813	0,145	306,537	0,127	— 0,018	328,293
49	— 30	9 44 27,5	243,044	0,114	285,736	0,134	+ 0,044	264,558
50	May 4	10 9 44,5	335,297	0,127	292,832	0,111	— 0,055	314,129
51	— 11	10 16 57,1	319,448	0,108	277,581	0,094	— 0,076	298,540
52	— 15	9 48 55,6	293,589	0,098	334,619	0,111	+ 0,089	314,298
53	— 25	10 32 18,2	273,804	0,079	234,740	0,068	— 0,113	254,233
54	Juni 1	10 3 36,6	240,261	0,070	202,241	0,059	— 0,128	221,188

5.

Beobachtungen der Positionswinkel des Satelliten III.

				St. Zeit.	Nord. Rand.	ε	St. Zeit.	Süd Rand.	ε	λ
33	1834	Octb. 11	*f*	0ᵘ 40′ 48″,0	167° 39′,5	—0′,31	0ᵘ 41′ 12″,5	175° 5′,0	—0′,60	+0′,35
34		— 15	*f*	1 12 19,5	176 1,25	—0,64	1 12 32,0	168 53,5	—0,37	+0,20
35		Nov. 8	*v*	1 49 38,0	162 22,75	—0,09	1 49 32,5	173 32,5	—0,55	—0,68
36	1835	Jan. 2	*v*	2 19 55,5	173 10,25	—0,53	2 19 42,5	165 54,0	—0,24	—2,10
37		— 8	*v*	4 47 57,0	170 59,0	—0,45	4 48 1,5	162 18,25	—0,09	—0,66
38		— 12	*v*	2 26 41,5	163 40,0	—0,15	2 27 5,0	171 9,5	—0,46	—1,77
39		— 14	*v*	2 57 26,5	164 20,5	—0,17	2 57 15,0	204 6,5	—1,22	—1,53
40		— 15	*v*	1 40 27,0	170 49,5	—0,44	1 40 23,0	159 26,75	+0,04	—2,09
41		— 21	*v*	6 0 14,5	164 11,75	—0,17	6 0 15,0	197 59,75	—1,19	0,00
42		Febr. 10	*v*	3 0 53,5	164 47,0	—0,19	3 0 57,0	171 49,0	—0,48	—1,50
44	1839	April 3	*f*	12 49 39,5	196 21,0	—1,16	12 49 27,0	206 36,5	—1,22	—0,87
45		— 12	*f*	11 59 42,0	211 30,0	—1,20	11 59 16,5	202 22,0	—1,22	—1,10
46		— 16	*v*	12 25 35,5	201 43,63	—1,22	12 25 25,0	209 18,75	—1,21	—0,97
47		— 17	*v*	12 47 10,5	198 44,63	—1,20	12 47 8,5	207 9,75	—1,22	—0,89
48		— 20	*v*	12 44 24,5	208 0,88	—1,22	12 44 19,0	201 4,5	—1,21	—0,96
49		— 30	*f*	12 16 42,5	202 13,63	—1,22	12 16 40,5	210 55,63	—1,21	—1,54
50		May 4	*v*	12 57 39,5	208 54,75	—1,21	12 57 45,5	201 47,88	—1,22	—1,59
51		— 11	*v*	13 32 53,5	209 30,75	—1,21	13 32 56,5	201 52,75	—1,22	—1,84
52		— 15	*f*	13 20 17,0	201 19,25	—1,21	13 20 27,0	208 29,75	—1,22	—2,16
53		— 25	*v*	14 42 2,5	202 23,5	—1,22	14 41 55,5	211 38,25	—1,20	—2,47
54		Juni 1	*v*	14 42 17,0	211 38,0	—1,19	14 42 16,5	202 25,0	—1,22	—2,97

Die Zeichen *v* und *f* bedeuten, dass die Declinationsaxe *voranging* und dass sie *folgte;* ε ist der Theilungsfehler (Band I. S. 149 Taf. IV); λ ist die von der Aufstellung des Instruments herrührende Verbesserung der Beobachtungen (Band I. S. 74).

Reduction der Positionswinkel des Satelliten III.

			Mittl. Zeit.	Halbe Summe + 90°	k′	±J	Reduct.	Refr.	Figur.	Posit. Wink.
33	1834	Octb. 11	11ᵘ 20′ 59″,3	261° 22′,15	— 11′,58	—1′,75	+1′,01	+1′,18	+0′,02	261° 11′,03
34		— 15	11 36 36,0	82 27,06	— 11,58	—1,70	—1,09	+0,86	0,00	82 13,55
35		Nov. 8	10 39 17,6	257 56,63	— 11,58	+1,66	+0,71	+0,48	+0,14	257 48,04
36	1835	Jan. 2	7 33 11,2	79 29,64	— 11,58	+1,63	—0,99	+0,27	—0,01	79 18,96
37		— 8	9 37 21,7	76 37,70	— 11,58	+1,60	—0,80	—0,75	+0,05	76 26,22
38		— 12	7 0 55,2	257 22,68	— 11,58	+1,63	+0,93	+0,21	+0,02	257 13,89
39		— 14	7 23 25,9	274 11,28	— 11,58	+1,66	+0,17	+0,20	—7,65	273 54,08

		ᵘ ′ ″	° ′	′	′	′	′	′	° ′
40	1835 Jan. 15	6 2 46,8	75 5,84	−11,58	+1,66	−0,60	+0,37	+0,12	74 55,81
41	— 21	9 58 18,6	271 5,07	−11,58	+1,65	+0,20	−0,39	−4,54	270 50,41
42	Febr. 10	5 40 50,3	258 16,17	−11,58	+1,60	+0,91	+0,09	0,00	258 7,19
44	1839 April 3	12 3 16,2	291 26,69	+ 1,46	−2,10	−0,12	+0,97	+0,10	291 27,00
45	— 12	10 37 57,2	116 53,69	+ 1,46	−2,09	+0,12	+1,29	−0,06	116 54,41
46	— 16	10 48 10,5	295 29,01	+ 1,46	+2,10	−0,14	+1,12	−0,02	295 33,53
47	— 17	11 5 50,1	293 0,09	+ 1,46	+2,09	−0,12	+0,93	+0,03	293 4,48
48	— 20	10 51 15,1	114 30,51	+ 1,46	+2,09	+0,14	+0,94	0,00	114 35,14
49	— 30	9 44 20,3	296 31,88	+ 1,46	−2,09	−0,10	+1,05	−0,03	296 32,17
50	May 4	10 9 30,9	115 18,51	+ 1,46	+2,08	+0,14	+0,83	−0,01	115 23,01
51	— 11	10 17 6,3	115 38,69	+ 1,46	+2,07	+0,10	+0,69	−0,02	155 42,99
52	— 15	9 48 53,7	294 51,13	+ 1,46	−2,07	−0,10	+0,67	+0,01	294 51,10
53	— 25	10 30 56,2	116 27,20	+ 3,46	+2,07	+0,07	+0,42	−0,03	116 33,19
54	Juni 1	10 3 42,5	116 57,33	+ 3,46	+2,06	+0,06	+0,26	−0,04	117 3,13

Die unmittelbar auf die Mittl. Zeit folgende Columne enthält die um ± 90° veränderte halbe Summe der beiden beobachteten Angaben des Positionskreises, von seinen Theilungsfehlern und dem Fehler der Aufstellung des Instruments befreiet; sie geht also ohne weitere Rechnung aus den Zahlen des vorigen Verzeichnisses der Beobachtungen hervor. *k′* ist der Indexfehler des Positionskreises; ± *J* ist Band I. S. 74 erklärt worden; die *Reduct.* überschriebene Columne enthält das, was der unmittelbar aus den Beobachtungen hervorgehenden halben Summe der Positionswinkel am Planeten und am Satelliten hinzugesetzt werden muss, um sie auf den ersteren zu reduciren; die *Refr.* überschriebene enthält die halbe Summe der Einflüsse der Strahlenbrechung auf die Positionswinkel an beiden Rändern der Scheibe des Planeten; die *Figur* überschriebene enthält endlich die der unvollständigen Erleuchtung des Planeten wegen erforderliche Verbesserung. Der aus der Summe aller Columnen hervorgehende Positionswinkel ist also der des Satelliten am wahren Mittelpunkte des Planeten.

6.

Messungen der Entfernungen des Satelliten IV.

	Barometer.		Thrm.	St. Zeit.	Vorg. Rand.	St. Zeit.	Folg. Rand.	Position.
	L	R	F	ᵘ ′ ″	R	ᵘ ′ ″	R	° ′
1832 Nov. 25	343,0	−5°	15°	23 2 55,8	11,1098	23 2 2,0	10,3550	64 30
1833 Sept. 6	340,4	+11	48	22 29 46,8	11,3394	22 30 17,7	10,5501	68 9
— 7	339,4	11	52,5	22 48 6,5	11,9626	22 49 6,0	11,1038	69 7
— 7	339,4	11	52,5	23 12 19,0	11,9443	23 12 13,8	11,1217	69 7

			L	R	F	U	R	U	R	O
1833	Sept.	8	339,1	11°	51°	22 18' 37,0"	10,9527	22 19' 6,8"	10,1497	70° 21'
	—	30	341,9	9	47	23 38 9,8	9,0379	23 37 40,5	9,9505	246 13
	Octb.	1	338,8	11	51	23 31 2,8	11,1615	23 31 13,0	12,0741	247 57
	—	2	340,2	8,7	42	23 20 49,0	11,6500	23 21 3,8	12,5509	248 55
	—	3	339,7	7,5	41,5	22 22 40,5	10,5373	22 22 59,5	11,3835	250 27
	—	4	340,6	8	41	22 23 37,5	7,8355	22 24 1,3	8,6966	252 5
	—	8	337,4	6	35	23 8 48,0	8,9859	23 9 9,0	8,0622	65 42
	—	10	339,2	6	35,5	22 51 13,0	12,7496	22 51 44,5	11,8469	68 19
	—	11	339,3	5	37	0 30 40,0	12,0812	0 30 10,5	11,1745	69 24
	—	12	335,1	7	44	0 2 2,3	9,8301	0 2 21,2	8,9133	70 42
	—	15	333,8	6	41	23 37 19,5	2,9307	23 37 5,5	3,8343	238 47
	—	18	331,5	5	41,5	23 58 7,3	11,7405	23 58 32,0	12,6368	248 0
	—	19	332,2	6	43	23 31 3,5	11,5586	23 31 8,5	12,4572	249 5
	—	20	334,5	7	45	0 29 23,3	9,5807	0 30 11,2	10,4950	250 28
	—	26	338,4	6,6	44	22 47 33,5	12,2885	22 47 46,0	11,3865	67 11
	—	27	340,6	6	41	23 56 20,8	12,7951	23 56 48,2	11,8856	68 18
	—	28	340,0	5	39,5	23 32 32,5	11,5412	23 32 54,5	10,6286	69 19
	—	30	338,2	3,5	34	22 43 42,5	4,8895	22 43 49,3	3,9683	75 11
	—	31	334,0	5	39	0 16 26,0	0,3449	0 16 39,0	1,2216	197 32
	Nov.	4	331,1	4	33	23 10 7,0	11,7846	23 10 2,8	12,6862	247 51
	—	4	331,1	4	33	0 27 21,8	11,7870	0 27 37,2	12,6929	247 58
	—	11	340,5	2	32	0 37 11,5	11,1190	0 37 35,0	10,2181	66 4
	—	13	340,7	1	28	21 48 0,3	12,3991	21 48 15,5	11,5068	68 14
	—	16	339,0	0	29	0 34 48,0	2,8908	0 34 55,5	1,9916	80 26
	—	27	338,1	2	31,3	22 16 37,8	8,7756	22 16 53,0	7,9022	64 37
	—	27	338,5	0	29	1 41 5,8	9,1964	1 41 15,2	8,3226	64 54
	Decbr.	7	331,5	3	37	2 1 38,8	10,9517	2 2 5,2	11,7913	247 11
	—	27	336,0	—2	22	3 54 31,5	3,8894	3 54 32,5	4,6867	252 58
1834	Febr.	3	340,2	+1,5	32	3 14 57,0	9,2942	3 15 28,8	8,5985	67 20
	—	6	339,1	—2	22	3 57 14,8	7,2027	3 57 29,5	6,5033	70 5
	—	13	336,7	—1	26	4 9 49,8	8,5729	4 9 55,5	9,2468	248 47
	—	17	336,9	0	28	4 24 33,5	1,9721	4 24 45,5	1,2980	55 27
	—	27	336,8	5	41	5 34 39,8	5,8594	5 35 50,5	6,5273	246 25
	Octb.	5	340,0	5	38	0 21 20,8	10,2881	0 21 39,7	11,0983	261 24
	—	11	336,3	4	44	1 8 31,5	5,0494	1 8 48,8	4,2084	75 55
	—	15	333,0	11,5	52	1 42 14,0	10,9778	1 42 12,5	10,1322	82 57
	—	17	323,8	8	46	0 28 20,0	5,5353	0 28 29,5	4,6964	87 26
	Nov.	8	333,0	7,5	43	1 19 37,3	11,4778	1 19 41,5	12,3787	261 4
1835	Jan.	2	341,2	1	32	4 59 43,8	4,8348	5 0 14,5	3,9741	71 59
	—	8	337,5	—1	26	5 16 50,0	5,7493	5 17 1,3	4,9175	82 54
	—	12	335,3	—1,5	26	2 56 8,8	8,9788	2 55 29,2	9,8229	256 25
	—	14	333,7	—1,5	26	2 31 41,5	10,5794	2 31 52,0	11,3809	258 26
	—	21	337,2	—3	22	3 26 49,5	10,6735	3 26 54,2	9,8920	77 6
	—	30	337,6	+1	29	7 43 24,0	10,2050	7 43 41,0	10,9084	257 54

		L	R	F	U ′ ″	R	U ′ ″	R	° ′
1835 Febr.	7	331,2	0°	29°	3 49 37,5	10,4063	3 49 41,0	9,6720	77 25
—	9	329,5	1	31	7 21 36,5	9,0556	7 22 5,5	8,3194	79 37
—	10	335,6	0	29	6 37 50,5	6,5095	6 38 7,5	5,7769	81 24
1839 April	2	340,3	−5	15	12 28 24,3	8,0327	12 28 24,7	8,8429	296 42
—	3	339,4	−5	15	12 17 11,3	10,0443	12 17 41,0	10,8833	295 26
—	12	334,4	0	28	12 24 39,5	11,3153	12 24 45,3	10,4868	114 46
—	15	336,7	0	28,5	11 21 53,8	5,8499	11 22 6,0	5,0196	110 21
—	17	337,4	0	26	13 18 46,5	2,5196	13 18 49,3	3,3270	303 29
—	20	337,4	5	38	12 21 30,3	10,3571	12 21 33,2	11,1849	295 13
—	30	339,0	7,5	44	12 42 26,3	10,0826	12 42 28,0	9,2658	113 41
May	2	338,2	10	42	13 26 28,5	4,1388	13 26 56,8	3,3101	108 39
—	4	335,3	9	47	13 19 41,3	3,7731	13 19 43,2	4,5830	300 20
—	6	336,4	9	43	12 30 13,0	9,3140	12 30 26,8	10,0915	295 54
—	9	336,9	9	47	12 44 54,5	7,8591	12 44 48,0	8,6289	293 1
—	15	335,0	14	61	12 53 24,8	10,6037	12 53 40,5	9,8562	115 21
—	25	335,6	9	49	14 15 54,8	8,8537	14 16 6,0	9,6142	293 55
Juni	1	335,6	13	56	14 14 36,0	10,3236	14 14 46,5	9,5839	115 3
—	9	339,4	14	57	14 58 14,0	9,3043	14 58 29,0	10,0306	295 25

Reduction der Entfernungen des Satelliten IV.

		Mittl. Zeit.	Vorg. Rand.	Refr.	Folg. Rand.	Refr.	Figur.	Entfern. vom Mittelp.
		U ′ ″	″	″	″	″	″	″
1	1832 Nov. 25	6 43 53,7	587,735	+0,182	547,769	+0,169	−0,185	567,743
2	1833 Sept. 6	11 27 2,3	599,808	0,190	558,055	0,177	+0,127	579,242
3	— 7	11 41 37,4	632,764	0,194	587,336	0,180	+0,129	610,366
4	— 7	12 5 14,0	631,796	0,186	588,282	0,173	+0,129	610,348
5	— 8	11 8 2,0	579,345	0,197	536,869	0,183	+0,123	558,420
6	— 30	11 0 22,3	478,066	0,137	526,341	0,151	−0,049	502,299
7	Octb. 1	10 49 40,3	590,390	0,168	638,665	0,182	−0,045	614,658
8	— 2	10 35 34,5	616,252	0,182	663,910	0,196	−0,041	640,229
9	— 3	9 33 41,8	557,392	0,188	602,155	0,203	−0,035	579,934
10	— 4	9 30 45,1	414,472	0,145	460,044	0,161	−0,030	437,381
11	— 8	10 0 3,2	475,337	0,139	426,473	0,125	+0,021	451,058
12	— 10	9 34 44,5	674,438	0,206	626,684	0,192	+0,016	650,776
13	— 11	11 9 28,9	639,076	0,186	591,109	0,172	+0,014	615,286
14	— 12	10 37 24,1	519,977	0,147	471,480	0,133	+0,012	495,881
15	— 15	10 0 41,2	155,021	0,045	202,819	0,058	−0,006	178,966
16	— 18	10 9 57,1	621,041	0,176	668,455	0,190	−0,002	644,929
17	— 19	9 38 52,1	611,415	0,173	658,951	0,187	−0,002	635,361
18	— 20	10 33 27,8	506,782	0,143	555,147	0,157	−0,001	531,114
19	— 26	8 28 1,6	650,024	0,192	602,309	0,177	0,000	626,351
20	— 27	9 32 49,1	676,833	0,195	628,718	0,181	−0,001	652,963
21	— 28	9 5 6,1	610,502	0,178	562,266	0,164	−0,002	586,553

22	1833	Octb.	30	8ᵘ 8′ 24″,7	258″,642	+0″,088	209″,912	+0″,071	—0″,004	234″,353
23		—	31	9 37 0,2	18,244	0,010	64,617	0,034	+0,003	41,456
24		Nov.	4	8 14 59,9	623,394	0,180	671,090	0,194	+0,012	647,441
25		—	4	9 32 11,8	623,521	0,180	671,445	0,194	+0,012	647,682
26		—	11	9 14 32,6	588,185	0,173	540,527	0,159	—0,029	564,493
27		—	13	6 17 54,1	655,916	0,227	608,709	0,211	—0,034	632,498
28		—	16	8 52 21,9	152,918	0,045	105,351	0,031	—0,037	129,136
29		—	27	5 51 23,2	464,218	0,139	418,015	0,125	—0,089	441,160
30		—	27	9 15 14,8	486,483	0,171	440,257	0,155	—0,089	463,444
31		Decb.	7	8 56 33,8	579,322	0,203	623,738	0,218	+0,126	601,867
32		—	27	9 30 17,1	205,748	0,108	247,926	0,131	+0,181	227,138
33	1834	Febr.	3	6 21 39,8	491,652	0,215	454,849	0,199	—0,165	473,292
34		—	6	6 51 54,4	381,025	0,194	344,026	0,176	—0,162	362,549
35		—	13	6 36 51,5	453,504	0,240	489,154	0,259	+0,146	471,725
36		—	17	6 35 52,3	104,320	0,070	68,662	0,046	—0,128	86,421
37		—	27	7 6 57,3	309,940	0,263	345,271	0,293	+0,115	327,999
38		Octb.	5	11 25 7,9	544,218	0,293	587,077	0,315	—0,156	565,796
39		—	11	11 48 34,6	267,091	0,092	222,605	0,076	+0,159	245,091
40		—	15	12 6 18,6	580,671	0,197	535,942	0,182	+0,126	558,622
41		—	17	10 44 50,4	292,791	0,142	248,417	0,120	+0,116	270,851
42		Nov.	8	10 9 26,6	607,141	0,213	654,799	0,229	—0,034	631,157
43	1835	Jan.	2	10 12 55,1	255,751	0,087	210,221	0,072	—0,085	232,981
44		—	8	10 6 13,4	304,133	0,100	260,131	0,085	—0,100	282,125
45		—	12	7 29 46,2	474,977	0,140	519,631	0,153	+0,122	497,573
46		—	14	6 57 56,1	559,651	0,166	602,052	0,179	+0,124	581,148
47		—	21	7 25 20,8	564,639	0,253	523,295	0,235	—0,197	544,014
48		—	30	11 5 56,2	539,839	0,331	580,223	0,356	+0,165	560,540
49		Febr.	7	6 41 14,0	550,488	0,161	511,674	0,150	—0,175	531,062
50		—	9	10 4 59,2	479,031	0,244	440,085	0,224	—0,177	459,615
51		—	10	9 17 18,4	344,344	0,143	305,590	0,127	—0,179	324,923
52	1839	April	2	11 46 6,8	424,944	0,224	467,807	0,246	0,000	446,611
53		—	3	11 31 14,4	531,366	0,285	575,752	0,308	0,000	553,856
54		—	12	11 3 6,2	598,578	0,281	554,748	0,261	—0,005	576,929
55		—	15	9 48 46,3	309,452	0,182	265,530	0,156	—0,009	287,651
56		—	17	11 37 23,3	133,283	0,061	175,994	0,082	+0,012	154,722
57		—	20	10 28 28,9	547,868	0,254	591,658	0,275	+0,019	570,047
58		—	30	10 10 1,7	533,334	0,212	490,127	0,194	—0,044	511,890
59		May	2	10 46 18,1	218,925	0,068	175,089	0,055	—0,050	197,019
60		—	4	10 31 27,1	199,577	0,079	242,417	0,095	+0,055	221,139
61		—	6	9 34 21,0	492,679	0,212	533,808	0,229	+0,059	513,523
62		—	9	9 37 2,3	415,710	0,156	456,430	0,172	+0,068	436,302
63		—	15	9 22 6,7	560,863	0,164	521,325	0,192	—0,085	541,187
64		—	25	10 5 1,9	468,319	0,137	508,547	0,149	+0,119	488,695
65		Juni	1	9 36 11,6	546,058	0,161	506,931	0,149	—0,133	526,517
66		—	9	9 48 17,4	492,140	0,137	530,558	0,148	+0,142	511,634

7.

Beobachtungen der Positionswinkel des Satelliten IV.

			St. Zeit.	Nord. Rand	ε	St. Zeit.	Süd Rand.	ε	λ
38	1834 Octb. 5	v	0ᵘ 21′ 36,″0	169° 33,′88	—0,′39	0ᵘ 21′ 25,″2	173° 33,′88	—0,′55	—2,′51
39	— 11	f	1 8 16,0	171 2,50	—0,45	1 8 22,5	161 13,50	—0,04	+0,20
40	— 15	f	1 42 30,5	175 20,50	—0,61	1 42 17,0	171 5,50	—0,45	0,00
41	— 17	f	0 28 23,5	182 1,0	—0,84	0 28 20,5	173 21,75	—0,54	+0,03
42	Nov. 8	v	1 19 35,5	169 14,75	—0,40	1 19 26,5	173 11,75	—0,54	—0,63
43	1835 Januar 2	v	4 59 36,5	167 22,0	—0,30	5 1 9,0	156 59,0	+0,14	—0,45
44	— 8	v	5 17 7,0	177 18,0	—0,69	5 16 51,5	168 54,5	—0,37	—0,36
45	— 12	v	2 55 36,5	164 8,5	—0,17	2 55 11,0	169 2,25	—0,37	—1,60
46	— 14	v	2 31 35,5	166 38,0	—0,27	2 31 32,5	170 34,5	—0,43	—1,74
47	— 21	v	3 26 46,5	169 22,5	—0,38	3 26 36,5	165 16,5	—0,21	—1,52
48	— 30	v	7 43 27,0	166 5,0	—0,24	7 43 15,0	169 58,75	—0,41	+1,07
49	Febr. 7	v	3 49 25,5	169 38,0	—0,39	3 49 20,5	165 39,0	—0,23	—1,14
50	— 9	v	7 22 12,5	172 2,75	—0,49	7 22 46,5	167 33,75	—0,31	+0,46
51	— 10	v	6 37 45,0	174 47,5	—0,59	6 37 58,0	168 23.5	—0,35	+0,32
53	1839 April 3	f	12 16 42,0	203 24,38	—1,22	12 16 39,0	207 32,87	—1,22	—1,04
54	— 12	f	12 24 43,5	206 52,25	—1,22	12 25 4,5	202 45,75	—1,22	—1,04
55	— 15	v	11 22 29,0	204 28,5	—1,22	11 22 33,5	196 11.0	—1,16	—0,99
56	— 17	v	13 18 16,5	206 4,25	—1,22	13 18 30,5	220 50,75	—1,05	—0,77
57	— 20	v	12 21 18,0	203 7,5	—1,22	12 21 16,0	207 15,75	—1,22	—0,97
58	— 30	f	12 41 47,5	206 0,75	—1,22	12 41 52,5	201 28,0	—1,21	—1,49
59	May 2	v	13 25 56,5	204 27,0	—1,22	13 25 53,0	192 48,25	—1,11	—1,44
60	— 4	v	13 19 25,0	205 7,75	—1,22	13 19 17,5	215 31,25	—1,15	—1,65
61	— 6	v	12 30 25,0	203 46,5	—1,22	12 30 28,0	208 1,0	—1,22	—1,60
62	— 9	v	12 44 43,0	200 32,25	—1,21	12 45 5,5	205 29,25	—1,22	—1,56
63	— 15	f	12 53 6,5	207 22,5	—1,22	12 53 3,0	203 25,75	—1,22	—1,95
64	— 25	v	14 15 32,0	201 43,0	—1,22	14 15 10,5	206 4,0	—1,22	—2,39
65	Juni 1	v	14 14 26,0	207 1,75	—1,22	14 14 24,5	203 0,0	—1,22	—2,83
66	— 9	f	14 58 12,5	203 28,25	—1,22	14 58 11,5	207 27,5	—1,22	—3,15

Reduction der Positionswinkel des Satelliten IV.

		Mittl. Zeit.	Halbe Summe ± 90°	k′	± J	Reduct.	Refr.	Figur.	Posit. Wink.
38	1834 Octb. 5	11ᵘ 25′ 8,″3	261° 30,′90	— 11,′58	+1,′79	+1,′82	+1,′60	0,′00	261° 24,′53
39	— 11	11 48 43,8	76 7,96	— 11,58	—1,72	—0,77	+0,69	+0,15	75 54,73
40	— 15	12 6 29,1	83 12,47	— 11,58	—1,67	—1,80	+0,61	0,00	82 58,03
41	— 17	10 44 47,6	87 40,72	— 11,58	—1,77	—0,88	+1,20	—0,11	87 27,58
42	Nov. 8	10 9 18,3	261 12,15	— 11,58	+1,77	+1,98	+0,67	0,00	261 4,99
43	1835 Januar 2	10 13 18,7	72 9,97	— 11,58	+1,60	—0,67	—0,33	+0,21	71 59,20

44	1835 Januar 8	10ᵁ 6′ 17″,0	·83° 5′,36	— 11′,58	+1′,61	—0′,84	—0′,34	—0′,08	82° 54′,13
45	— 12	7 29 21,0	256 33,51	— 11,58	+1,60	+1,46	+0,11	+0,01	256 25,11
46	— 14	6 57 43,4	258 34,16	— 11,58	+1,62	+1,71	+0,21	0,00	258 26,12
47	— 21	7 26 10,6	77 17,69	— 11,58	+1,60	—1,59	+0,01	+0,01	77 6,14
48	— 30	11 5 54,7	258 2,62	— 11,58	+1,76	+1,65	—1,28	0,00	257 53,17
49	Febr. 7	6 40 57,8	77 37,05	— 11,58	+1,59	—1,57	—0,07	0,00	77 25,42
50	— 9	10 4 37,5	79 48,31	— 11,58	+1,72	—1,37	—1,02	—0,01	79 36,05
51	— 10	9 17 11,0	81 35,35	— 11,58	+1,68	—0,97	—0,70	—0,03	81 23,75
53	1839 April 3	11 30 28,8	295 26,37	+ 1,46	—2,10	—0,29	+1,29	0,00	295 26,73
54	— 12	11 3 17,8	114 46,74	+ 1,46	—2,10	+0,27	+1,11	0,00	114 47,48
55	— 15	9 49 17,8	110 17,57	+ 1,46	+2,09	+0,13	+1,45	+0,09	110 22,79
56	— 17	11 36 59,0	303 25,60	+ 1,46	+2,09	—0,06	+1,08	—0,61	303 29,56
57	— 20	10 28 14,2	295 9,44	+ 1,46	+2,09	—0,24	+1,07	0,00	295 13,82
58	— 30	10 9 24,7	113 41,67	+ 1,46	—2,09	+0,19	+0,89	+0,01	113 42,13
59	May 2	10 45 30,4	108 35,02	+ 1,46	+2,07	+0,07	+0,56	+0,22	108 39,40
60	— 4	10 31 6,2	300 16,67	+ 1,46	+2,08	—0,07	+0,89	—0,18	300 20,85
61	— 6	9 34 27,6	295 50,93	+ 1,46	+2,08	—0,17	+0,97	—0,01	295 55,26
62	— 9	9 37 5,2	292 57,98	+ 1,46	+2,08	—0,15	+0,80	+0,01	293 2,18
63	— 15	9 21 38,9	115 20,96	+ 1,46	—2,07	+0,17	+0,79	0,00	115 21,31
64	— 25	10 4 22,8	293 49,89	+ 3,46	+2,06	—0,14	+0,41	+0,01	293 55,69
65	Juni 1	9 35 55,6	114 56,83	+ 3,46	+2,06	+0,15	+0,46	0,00	115 2,96
66	— 9	9 48 7,9	295 23,51	+ 3,46	—2,06	—0,15	+0,26	0,00	295 25,02

Die im 5ten § über die Beobachtungen der Positionswinkel des Satelliten III gegebenen Erklärungen gehören auch zu den gegenwärtig mitgetheilten des Satelliten IV.

Über alle Beobachtungen der Satelliten bemerke ich, dass die von der Heiterkeit und Ruhe der Luft abhängige mehr oder weniger scharfe Begrenzung des Randes des Planeten, in die Messung seiner Entfernung von einem Satelliten einige Willkür bringt, und dass daher mein Bestreben war, an beiden entgegengesetzten Punkten des Randes, auf welche jede Beobachtung bezogen worden ist, eine *gleiche* Lage des Satelliten gegen den Rand hervorzubringen, ohne immer auf die Bisection des erstern durch den letzteren auszugehen. Wenn ich hierin erfolgreich gewesen bin, so ist der Einfluss der veränderlichen Deutlichkeit des Randes auf die Entfernung des Satelliten vom Mittelpunkte des Planeten vermieden worden.

8.

Um die jetzt angeführten Beobachtungen der vier Satelliten des Jupiter, mit den unbekannten Grössen, welche dadurch bestimmt werden sollen, in Verbindung zu bringen, muss man *Tafeln* besitzen, welche die Örter und Entfernungen der Satelliten, bezogen auf den Mittelpunkt des Planeten, angeben. Das Bedürfniss solcher Tafeln ist bisher nur nicht hervorgetreten, weil man kaum etwas Anderes an den Satelliten beobachtet hat, als ihre Finsternisse; jetzt aber habe ich sie entworfen und werde sie an dem Ende dieser Abhandlung bekannt machen.

Über die Wahl der Elemente dieser Tafeln habe ich mich, trotz der schönen *Laplace*schen Untersuchung, welche der 4te Band der *Mecanique Céleste* enthält, in einiger Unsicherheit befunden, welche theils von vorhandenen Rechnungs- oder Druckfehlern herrührt, theils von der Unzulänglichkeit der Angaben erzeugt wird, welche Herr *Damoiseau* von den Veränderungen der Elemente ertheilt, auf deren neuer Bestimmung seine — 1836 erschienenen — Tafeln beruhen. Ich fürchte, dass man, um die Formeln für die Bewegungen der Jupiterssatelliten, wieder theoretisch *ganz zusammenhangend* zu machen, gezwungen sein wird, die unvollständig dargestellten Resultate des Herrn *Damoiseau* zu verlassen und bis zu einer neuen Untersuchung der Elemente zurückzugehen. Indessen werden die jetzt übrigbleibenden Unsicherheiten nicht von so grossem Belange sein, dass sie die Anwendung der Tafeln zur Reduction der gemachten Beobachtungen wesentlich beeinträchtigen könnten.

Ich werde zuerst die Ausdrücke der *wahren Längen* v, v', v'', v''' der Satelliten in ihren Bahnen mittheilen, welche die Mecanique Céleste (Liv. VIII. Chap. XI—XIV) enthält. Die Bezeichnungen sind folgende:

θ, θ', θ'', θ''' ... mittlere Längen der Satelliten
ω, ω', ω'', ω''' ... Längen ihrer Jupitersnähen
$\varDelta$, $\varDelta'$, $\varDelta''$, $\varDelta'''$... Längen ihrer aufsteigenden Knoten auf der Ebene der Jupiterbahn
V und $\varPi$..... mittlere Anomalie und Länge des Jupiter
$\varPsi$ Länge des aufsteigenden Knotens des Aequators des Jupiter auf seiner Bahn.

Die Eintheilung des Quadranten ist die hunderttheilige.

$$
\begin{aligned}
v = \theta & + 40'',69 \sin(\theta-\omega'') \\
& + 19,11 \sin(\theta-\omega''') \\
& - 178,41 \sin(\theta-2\theta'+\omega'') \\
& - 76,36 \sin(\theta-2\theta'+\omega''') \\
& - 43,56 \sin(\theta-\theta') + 5050'',59 \sin 2(\theta-\theta') + 16'',46 \sin 3(\theta-\theta') + 3'',76 \sin 4(\theta-\theta') \\
& \qquad + 1'',26 \sin 5(\theta-\theta') \\
& - 19,41 \sin(\theta-\theta'') + 16'',39 \sin 2(\theta-\theta'') + 1'',68 \sin 3(\theta-\theta'') \\
v' = \theta' & + 367'',95 \sin(\theta'-\omega'') \\
& + 160,62 \sin(\theta'-\omega''') \\
& + 566,22 \sin(\theta-2\theta'+\omega'') \\
& + 254,97 \sin(\theta-2\theta'+\omega''') \\
& - 111,34 \sin V \\
& - 163,29 \sin(\theta'-\theta'') + 11920'',67 \sin 2(\theta'-\theta'') + 60'',96 \sin 3(\theta'-\theta'') + 74'',61 \sin 4(\theta'-\theta'') \\
& \qquad + 4'',66 \sin 5(\theta'-\theta'') + 3'',66 \sin 6(\theta'-\theta'') \\
& - 5'',28 \sin(\theta'-\theta''') + 4'',62 \sin 2(\theta'-\theta''') \\
v'' = \theta'' & + 1709'',05 \sin(\theta''-\omega'') \\
& + 756,61 \sin(\theta''-\omega''') \\
& - 95,18 \sin(\theta-2\theta'+\omega'') \\
& - 43,58 \sin(\theta-2\theta'+\omega''') \\
& - 147,42 \sin V \\
& + 5,29 \sin(\theta''-2\Pi+\omega'') \\
& + 2,34 \sin(\theta''-2\Pi+\omega''') \\
& + 2,39 \sin 2(\theta''-\Pi) \\
& - 808,20 \sin(\theta'-\theta'') - 11'',84 \sin 2(\theta'-\theta'') - 6'',58 \sin 3(\theta'-\theta'') \\
& - 45,29 \sin(\theta''-\theta''') + 154'',47 \sin 2(\theta''-\theta''') + 10'',86 \sin 3(\theta''-\theta''') + 2'',53 \sin 4(\theta''-\theta''') \\
v''' = \theta''' & - 220'',73 \sin(\theta'''-\omega'') \\
& + 9265,56 \sin(\theta'''-\omega''') + 42'',14 \sin 2(\theta'''-\omega''') + 0'',27 \sin 3(\theta'''-\omega''') \\
& - 349,79 \sin V \\
& + 12,99 \sin 2(\theta'''-\Pi) \\
& + 66,94 \sin(\theta'''-2\Pi+\omega''') \\
& + 49,51 \sin(\Lambda'''-\Psi) \\
& - 31,36 \sin(\theta''-\theta''') - 14'',12 \sin 2(\theta''-\theta''') - 2'',95 \sin 3(\theta''-\theta''') - 0'',90 \sin 4(\theta''-\theta''') \\
& \qquad - 0'',33 \sin 5(\theta''-\theta''')
\end{aligned}
$$

Die Formel für v weicht von der in der Mec. Cél. befindlichen dadurch ab, dass *Laplace* auch die Glieder der letzten Zeile von dem Argumente $\theta-\theta'$ der vorletzten abhängig gemacht hat, indem er

$$\theta-\theta'' = \tfrac{3}{2}(\theta-\theta') + 100^\circ$$

annimmt. Wirklich ist, der bekannten Relation zwischen den mittleren Bewegungen der drei ersten Jupiterssatelliten zufolge:

$$2(\theta-\theta'') = 3(\theta-\theta') + 200^\circ$$

allein man kann daraus nur

$$\theta-\theta'' = \tfrac{3}{2}(\theta-\theta') \pm 100^\circ,$$

nicht aber den unzweideutigen, in der Mec. Cél. angewandten Ausdruck folgern. Man könnte alle Glieder der beiden letzten Zeilen unzweideutig durch $\theta'-\theta''$ ausdrücken; allein ich halte dieses nicht für bequem, indem dadurch das grosse, in $\sin 2(\theta-\theta')$ multiplicirte Glied, von $\sin 4(\theta'-\theta'')$ abhängig werden und daher der Tafel grössere Differenzen geben würde, als für ihre Anwendung angenehm ist. Ich habe daher vorgezogen, die von beiden Argumenten $\theta-\theta'$ und $\theta-\theta''$ abhängigen Glieder unvereinigt in Tafeln zu bringen. Das in $\sin 5(\theta-\theta')$ multiplicirte Glied hat in der Mec. Cél. den Coefficienten 1,″58, stimmt aber dann nicht mit der Angabe P. 89 überein, aus welcher es, durch einen Schreibfehler in der ersten Decimale der Logarithmen, irrig abgeleitet zu sein scheint. In der Formel für v' hat das 4te Glied das Argument $\theta'-2\theta''+\varpi'''$, sollte also, auf das von mir angewandte, um zwei Quadranten davon verschiedene Argument bezogen, das entgegengesetzte Zeichen erhalten; ich halte dieses für einen Druckfehler, den sowohl Herr *Delambre*, als auch Herr *Damoiseau*, in ihren Tafeln schon verbessert haben. Die Verschiedenheit des Zeichens des 3ten und 4ten Gliedes der Formel für v'' erklärt sich aus der Abänderung des Arguments. Übrigens sind die hier angeführten Formeln der Mec. Cél. entsprechend.

Indessen hat Herr *Damoiseau*, aus seiner neuen Untersuchung der Beobachtungen der Finsternisse der Satelliten, neue Bestimmungen, sowohl der Massen dieser Satelliten, als auch der übrigen Elemente ihrer Theorie gezogen und dadurch Änderungen der angeführten Formeln erlangt. Es ist zn bedauern, dass er diese geänderten Formeln, in der Einleitung seiner Tafeln, nicht in derselben Gestalt mittheilt, in welcher die Mec. Cél. die ursprünglichen enthält. Ich werde dieses, insoweit es ohne gänzliche Wiederholung der Untersuchung angeht, zu ergänzen suchen. Die Massen der Satelliten findet Herr *Damoiseau:*

$m = 0{,}0000168770$	Mec. Cél.	0,0000173281
$m' = 0{,}0000232270$		0,0000232355
$m'' = 0{,}0000884370$		0,0000884972
$m''' = 0{,}0000424751$		0,0000426591

Seine Angaben der Einflüsse, welche die verschiedenen Glieder der Formeln für v, v', v'', v''' auf die Zeiten der Finsternisse äussern, zeigen, dass er jene folgendermassen geändert hat:

v Arg. =	$\theta-\theta'+\omega''$	Coeff. = $-$ 168'',48
	$\theta-2\theta'+\omega'''$	 $-$ 73,79
v'	$2(\theta'-\theta'')$	 $+$ 11806,10
	$\theta-2\theta'+\omega''$	 $+$ 554,15
	$\theta-2\theta'+\omega'''$	 $+$ 248,42
v''	$\theta''-\omega''$	 $+$ 1675,25
	$\theta''-\omega'''$	 $+$ 422,46
	$\theta-2\theta'+\omega''$	 $-$ 85,01
	$\theta-2\theta'+\omega'''$	 $-$ 38,32
v'''	$\theta'''-\omega'''$	 $+$ 9222,50
	$2(\theta'''-\omega''')$	 $+$ 24,31
	$\theta''-\theta'''$	 $-$ 28,31

Andere Änderungen sind von kleinerem Belange. Die bedeutendste von allen ist die des Coefficienten von $\sin(\theta''-\omega''')$ im Ausdrucke von v''. Nimmt man diese Veränderungen an, setzt man in den Ausdrücken P. 89—94 der Mec. Cél. die *Damoiseau*schen Werthe der Massen voraus und drückt man die Formeln der Sexagesimaleintheilung des Kreises gemäss aus, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
v = \theta & + 13'',18 \sin(\theta-\omega'') \\
& + 6,19 \sin(\theta-\omega''') \\
& - 54,59 \sin(\theta-2\theta'+\omega'') \\
& - 23,91 \sin(\theta-2\theta'+\omega''') \\
& - 14,11 \sin(\theta-\theta') + 1635'',80 \sin 2(\theta-\theta') + 5'',33 \sin 3(\theta-\theta') + 1'',22 \sin 4(\theta-\theta') \\
& \qquad + 0'',41 \sin 5(\theta-\theta') \\
& - 6,55 \sin(\theta-\theta'') + 5'',53 \sin 2(\theta-\theta'') + 0'',57 \sin 3(\theta-\theta'') \\
v' = \theta' & + 119'',22 \sin(\theta'-\omega'') \\
& + 52,04 \sin(\theta'-\omega''') \\
& + 179,54 \sin(\theta-2\theta'+\omega'') \\
& + 80,49 \sin(\theta-2\theta'+\omega''') \\
& - 36,07 \sin V
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& - 52{,}''87 \sin(\theta'-\theta'') + 3825{,}''18 \sin 2(\theta'-\theta'') + 19{,}''73 \sin 3(\theta'-\theta'') + 24{,}''25 \sin 4(\theta'-\theta'') \\
& \qquad + 1{,}''51 \sin 5(\theta'-\theta'') + 1{,}''18 \sin 6(\theta'-\theta'') \\
& - 1{,}70 \sin(\theta'-\theta''') + 1{,}''49 \sin 2(\theta'-\theta''') \\
v'' = \theta'' & + 542{,}''78 \sin(\theta''-\omega'') \\
& + 136{,}88 \sin(\theta''-\omega''') \\
& - 27{,}54 \sin(\theta-2\theta'+\omega'') \\
& - 12{,}42 \sin(\theta-2\theta'+\omega''') \\
& - 47{,}76 \sin V \\
& + 1{,}71 \sin(\theta''-2\Pi+\omega'') \\
& + 0{,}76 \sin(\theta''-2\Pi+\omega''') \\
& + 0{,}77 \sin 2(\theta''-\Pi) \\
& - 261{,}64 \sin(\theta'-\theta'') - 3{,}''83 \sin 2(\theta'-\theta'') - 2{,}''10 \sin 3(\theta'-\theta'') \\
& - 14{,}61 \sin(\theta''-\theta''') + 49{,}''83 \sin 2(\theta''-\theta''') + 3{,}''50 \sin 3(\theta''-\theta''') + 0{,}''82 \sin 4(\theta''-\theta''') \\
& \qquad + 0{,}''26 \sin 5(\theta''-\theta''') \\
v''' = \theta''' & - 71{,}''52 \sin(\theta'''-\omega'') \\
& + 2988{,}09 \sin(\theta'''-\omega''') + 13{,}''53 \sin 2(\theta'''-\omega''') \\
& - 113{,}33 \sin V \\
& + 4{,}21 \sin 2(\theta'''-\Pi) \\
& + 21{,}69 \sin(\theta'''-2\Pi+\omega''') \\
& + 16{,}04 \sin(\varLambda'''-\Psi) \\
& - 10{,}15 \sin(\theta''-\theta''') - 4{,}''57 \sin 2(\theta''-\theta''') - 0{,}''95 \sin 3(\theta''-\theta''') - 0{,}''29 \sin 4(\theta''-\theta''') \\
& \qquad - 0{,}''11 \sin 5(\theta''-\theta''')
\end{aligned}
$$

Dieses sind die Formeln für die Längen der Satelliten, nach welchen ich die Tafeln berechnet habe. Jedoch habe ich den von $\theta'-\theta'''$ abhängigen Theil des Ausdruckes von v' und die von $\theta''-2\Pi+\omega''$, $\theta''-2\Pi+\omega'''$, $\theta''-\Pi$ abhängigen Theile des Ausdruckes von v'', ihres unerheblichen Einflusses wegen, weggelassen.

9.

In den Formeln für die *Radienvectoren* (Mec. Cél. IV. P. 90—94) sind Irrthümer oder Verwechselungen vorgefallen, indem ihre nichtperiodischen Theile sämmtlich unrichtig sind. Herr *Airy* hat dieses schon bemerkt. Ich habe neu gerechnet und dadurch gefunden, dass die Zahlen der Mec. Cél. folgendermassen verbessert werden müssen:

		Mec. Cél.
r	$-0{,}00004127\,m'$	$+0{,}00008486\,m'$
	$-0{,}00000702\,m''$	$+0{,}00000703\,m''$
	$-0{,}00000113\,m'''$	$+0{,}00000113\,m'''$
	$-0{,}00000016$	$+0{,}00000095$
r'	$+0{,}00044579\,m$	$-0{,}00044608\,m$
	$-0{,}00006493\,m''$	$+0{,}00006497\,m''$
	$-0{,}00000797\,m'''$	$+0{,}00000798\,m'''$
	$-0{,}00000102$	$+0{,}00000609$
r''	$+0{,}00054783\,m$	$-0{,}00054798\,m$
	$+0{,}00070921\,m'$	$-0{,}00070942\,m'$
	$-0{,}00006848\,m'''$	$+0{,}00006850\,m'''$
	$-0{,}00000657$	$+0{,}00003944$
r'''	$+0{,}00088135\,m$	$-0{,}00088152\,m$
	$+0{,}00093965\,m'$	$-0{,}00093981\,m'$
	$+0{,}00114432\,m''$	$-0{,}00114443\,m''$
	$-0{,}00006293$	$+0{,}00037741$

In diesen Ausdrücken der nichtperiodischen Glieder der Radienvectoren bedeuten m, m', m'', m''' die mit 10000 multiplicirten Massen der Satelliten. Setzt man für diese die von Herrn *Damoiseau* gefundenen Werthe, wendet man dieselben Werthe zur Berechnung der Coefficienten der periodischen Glieder (Mec. Cél. IV. P. 90—94) an, fügt man die unmittelbaren Einflüsse der Excentricitäten der Bahnen hinzu und reducirt man endlich Alles, durch Division mit den in der Mec. Cél. angenommenen Werthen der mittleren Entfernungen, nämlich

5,698491
9,066548
14,461893
25,43590

auf die mittleren Entfernungen $=1$, so erhält man folgende Formeln:

$$
\begin{aligned}
\frac{r}{a} = 1 & - 0{,}0000029 \\
& - 0{,}0000320 \cos(\theta-\omega'') \\
& - 0{,}0000150 \cos(\theta-\omega''') \\
& + 0{,}0000190 \cos(\theta-\theta') - 0{,}0039799 \cos 2(\theta-\theta') - 0{,}0000167 \cos 3(\theta-\theta') \\
& \qquad - 0{,}0000044 \cos 4(\theta-\theta') - 0{,}0000016 \cos 5(\theta-\theta') \\
& + 0{,}0000121 \cos(\theta-\theta'') - 0{,}0000165 \cos 2(\theta-\theta'') - 0{,}0000020 \cos 3(\theta-\theta'')
\end{aligned}
$$

$$\frac{r'}{a'} = 1 + 0{,}0000015$$
$$- 0{,}0002890 \cos(\theta'-\omega'')$$
$$- 0{,}0001262 \cos(\theta'-\omega''')$$
$$+ 0{,}0000715 \cos(\theta'-\theta'') - 0{,}0094014 \cos 2(\theta'-\theta'') - 0{,}0000618 \cos 3(\theta'-\theta'')$$
$$- 0{,}0000053 \cos 4(\theta'-\theta'') - 0{,}0000059 \cos 5(\theta'-\theta'')$$
$$+ 0{,}0000033 \cos(\theta'-\theta''') - 0{,}0000047 \cos 2(\theta'-\theta''') - 0{,}0000005 \cos 3(\theta'-\theta''')$$

$$\frac{r''}{a''} = 1 + 0{,}0000153$$
$$- 0{,}0013157 \cos(\theta''-\omega')$$
$$- 0{,}0003318 \cos(\theta''-\omega''')$$
$$+ 0{,}0006646 \cos(\theta'-\theta'') + 0{,}0000147 \cos 2(\theta'-\theta'') - 0{,}0000034 \cos 3(\theta'-\theta'')$$
$$+ 0{,}0000012 \cos 4(\theta'-\theta'')$$
$$+ 0{,}0000221 \cos(\theta''-\theta''') - 0{,}0001321 \cos 2(\theta''-\theta''') - 0{,}0000117 \cos 3(\theta''-\theta''')$$
$$- 0{,}0000031 \cos 4(\theta''-\theta''') - 0{,}0000010 \cos 5(\theta''-\theta''')$$

$$\frac{r'''}{a'''} = 1 + 0{,}0000517$$
$$+ 0{,}0001734 \cos(\theta'''-\omega')$$
$$- 0{,}0072433 \cos(\theta'''-\omega''') - 0{,}0000262 \cos 2(\theta'''-\omega''')$$
$$- 0{,}0000148 \cos 2(\theta'''-\Pi)$$
$$+ 0{,}0001134 \cos(\theta''-\theta''') + 0{,}0000201 \cos 2(\theta''-\theta''') + 0{,}0000047 \cos 3(\theta''-\theta''')$$

In den Tafeln ist der von $\theta'-\theta'''$ abhängige Theil des Ausdruckes von $\frac{r'}{a'}$ weggelassen.

10.

Für die *Breiten* über der Ebene der Jupitersbahn s, s', s'', s''' sind in der Mec. Cél. folgende Formeln gegeben, in welchen U die heliocentrische Länge des Jupiters bezeichnet:

$$s = \overset{o}{3},43320 \sin(v-\Psi)$$
$$- 0{,}010504 \sin(v-\Lambda')$$
$$- 0{,}002549 \sin(v-\Lambda'')$$
$$+ 0{,}000526 \sin(v-2U+\Psi)$$

$$s' = \overset{o}{3},41507 \sin(v'-\Psi)$$
$$- 0{,}515220 \sin(v'-\Lambda')$$
$$- 0{,}037468 \sin(v'-\Lambda'')$$
$$- 0{,}006488 \sin(v'-\Lambda''')$$
$$+ 0{,}001049 \sin(v'-2U+\Psi)$$
$$- 0{,}000158 \sin(v'-2U+\Lambda')$$

$$
\begin{aligned}
s'' = {} & 3{,}^{\circ}34213 \sin(v''-\Psi) \\
& + 0{,}017648 \sin(v''-\varDelta') \\
& - 0{,}208390 \sin(v''-\varDelta'') \\
& - 0{,}034607 \sin(v''-\varDelta''') \\
& + 0{,}002070 \sin(v''-2U+\Psi) \\
& - 0{,}000142 \sin(v''-2U+\varDelta'') \\
s''' = {} & 2{,}^{\circ}98051 \sin(v'''-\Psi) \\
& + 0{,}000480 \sin(v'''-\varDelta') \\
& + 0{,}044893 \sin(v'''-\varDelta'') \\
& - 0{,}277160 \sin(v'''-\varDelta''') \\
& + 0{,}004315 \sin(v'''-2U+\Psi) \\
& - 0{,}000401 \sin(v'''-2U+\varDelta''')
\end{aligned}
$$

Die Lage des Jupitersaequators gegen die Jupitersbahn, von welcher die Hauptglieder dieser Formeln grösstentheils abhangen, wird in der Mec. Cél., nach *Delambres* Untersuchung folgendermassen angenommen:

Länge des aufst. Knotens $\Psi = 348{,}^{\circ}62129 + t.\,153{,}''8$

Neigung $3{,}43519 + t.\ 0{,}''07035$

in welchen Formeln die Zeit t in Julianischen Jahren, von 1750 an, gezählt wird.

Herr *Damoiseau* hat aber auch für die Elemente, von welchen die Breiten abhängig sind, neue Bestimmungen gesucht, und, in Centesimalgraden ausgedrückt, die Länge des aufsteigenden Knotens und die Neigung des Jupitersaequators gegen die Jupitersbahn

$$= 348{,}^{\circ}18380 \text{ und } = 3{,}^{\circ}40895$$

so wie auch die Coefficienten von

$\sin(v'-\varDelta')$ im Ausdrucke von $s' = -0{,}^{\circ}521667$

$\sin(v''-\varDelta'')$ $s'' = -0{,}186821$

$\sin(v'''-\varDelta''')$ $s''' = -0{,}261698$

gefunden. Verbindet man diese Bestimmungen mit den Zahlenangaben der Mec. Cél., obgleich diese von den Massen der Satelliten abhängig sind und daher, der neuen Bestimmung derselben gemäss, etwas abgeändert werden sollten, so kann man dadurch neue Formeln für die Breiten der Satelliten erhalten. Man hat nämlich:

1. die von $v-\Psi$, $v'-\Psi$ u. s. w. abhängigen Glieder resp.

$$3^{\circ},40895\,(1-\lambda) = 3^{\circ},40698$$
$$3,40895\,(1-\lambda') = 3,38898$$
$$3,40895\,(1-\lambda'') = 3,31661$$
$$3,40895\,(1-\lambda''') = 2,95775$$

wo (Mec. Cél. IV. P. 131)

$$\lambda\ = 0,00057879$$
$$\lambda' = 0,00585888$$
$$\lambda'' = 0,02708801$$
$$\lambda''' = 0,13235804$$

angenommen sind.

2. Die von $v-\mathit{\Delta}'$, $v'-\mathit{\Delta}'$, u. s. w. abhängigen Glieder:

$$-0^{\circ},521667\,\frac{l}{l'} = -0,01085$$
$$-0,521667 \quad = -0,52167$$
$$-0,521667\,\frac{l''}{l'} = +0,01787$$
$$-0,521667\,\frac{l'''}{l'} = +0,00049$$

wo

$$\frac{l}{l'} = +0,020794 \quad \text{M. C. IV. P. 167}$$
$$\frac{l''}{l'} = -0,034253 \quad \ldots\ldots\ldots 155$$
$$\frac{l'''}{l'} = -0,000931164 \quad \ldots\ldots\ldots 145$$

angenommen sind.

3. Die von $v-\mathit{\Delta}''$, $v'-\mathit{\Delta}''$, u. s. w. abhängigen Glieder:

$$-0^{\circ},186821\,\frac{l}{l''} = -0,00209$$
$$-0,186821\,\frac{l'}{l''} = -0,03065$$
$$-0,186821 \quad = -0,18682$$
$$-0,186821\,\frac{l'''}{l''} = +0,03672$$

wo

$$\frac{l}{l''} = +0,011163 \quad \text{. M. C. IV. P. 167}$$
$$\frac{l'}{l''} = +0,164053 \quad \ldots\ldots\ldots 162$$
$$\frac{l'''}{l''} = -0,196565 \quad \ldots\ldots\ldots 144$$

angenommen sind.

4. Die von $v-\mathit{\Delta}'''$, $v'-\mathit{\Delta}'''$ u. s. w. abhängigen Glieder:

$$- 0{,}261698 \frac{l}{l'''} = 0$$
$$- 0{,}261698 \frac{l'}{l'''} = - 0{,}00613$$
$$- 0{,}261698 \frac{l''}{l'''} = - 0{,}03268$$
$$- 0{,}261698 \quad = - 0{,}26170$$

wo

$$\frac{l}{l'''} = 0 \;\ldots\ldots\; \text{M. C. IV. P. } 167$$
$$\frac{l'}{l'''} = + 0{,}023411 \;\ldots\ldots\ldots\; 162$$
$$\frac{l''}{l'''} = + 0{,}124862 \;\ldots\ldots\ldots\; 155$$

angenommen sind.

Die hierdurch geänderten Formeln für die Breiten der Satelliten, in Sexagesimalsecunden ausgedrückt sind:

$$s = 11038{,}''6 \sin(v-\Psi) - 35{,}''1 \sin(v-\varLambda') - 6{,}''8 \sin(v-\varLambda'')$$
$$+ 1{,}''7 \sin(v-2U+\Psi)$$
$$s' = 10980{,}''3 \sin(v'-\Psi) - 1690{,}''2 \sin(v'-\varLambda') - 99{,}''3 \sin(v'-\varLambda'') - 19{,}''9 \sin(v'-\varLambda''')$$
$$+ 3{,}''4 \sin(v'-2U+\Psi) - 0{,}''5 \sin(v'-2U+\varLambda')$$
$$s'' = 10745{,}''8 \sin(v''-\Psi) + 57{,}''9 \sin(v''-\varLambda') - 605{,}''3 \sin(v''-\varLambda'') - 105{,}''9 \sin(v''-\varLambda''')$$
$$+ 6{,}''7 \sin(v''-2U+\Psi) - 0{,}''5 \sin(v''-2U+\varLambda'')$$
$$s''' = 9583{,}''1 \sin(v'''-\Psi) + 1{,}''6 \sin(v'''-\varLambda') + 119{,}''0 \sin(v'''-\varLambda'') - 847{,}''9 \sin(v'''-\varLambda''')$$
$$+ 14{,}''0 \sin(v'''-2U+\Psi) - 1{,}''3 \sin(v'''-2U+\varLambda''')$$

In den Tafeln ist das letzte Glied der drei letzten Formeln weggelassen und im vorletzten, statt der wahren Länge U des Jupiters, die mittlere Π angenommen.

11.

Die *mittleren Bewegungen*, sowohl der Satelliten selbst, als auch der Argumente ihrer Ungleichheiten, werden von Herrn *Damoiseau* mit der wünschenswerthen Vollständigkeit angegeben. Jedoch habe ich die kleine Änderung daran angebracht, welche nöthig war, um die mittleren Bewegungen der drei ersten Satelliten der durch die Theorie gegebenen Forderung:

$$\theta'-\theta = 2(\theta''-\theta') + 200^\circ$$

ganz entsprechend zu machen.

Der leichteren Vergleichung mit der Mec. Cél. wegen, werde ich die in den Tafeln angewandten Bestimmungen, zuerst in hunderttheiligen

Graden ausgedrückt mittheilen. Die Zeit t bedeutet die von der Mitternacht zwischen dem 31. Decbr. 1749 und dem 1. Janr. 1750 an gezählten Tage.

		Beweg. in einem Julian. Jahre.
θ	$= 16{,}^{\circ}68044 + t.226{,}^{\circ}0988815275$	$182{,}^{\circ}61647792$
θ'	$= 346{,}49950 + t.112{,}6386245255$	$341{,}25760794$
θ''	$= 11{,}40903 + t.\ 55{,}9084960245$	$20{,}57817295$
θ'''	$= 366{,}88637 + t.\ 23{,}967899367$	$354{,}27524380$
ω''	$= 349{,}94182 + t.\ 0{,}007966809$	$2{,}90987699$
ω'''	$= 200{,}48841 + t.\ 0{,}002164648$	$0{,}79063768$
Π	$= 4{,}18149 + t.\ 0{,}0923659744$	$33{,}73667215$
$\Pi - V$	$= 11{,}48840 + t.\ 0{,}0000482166$	$0{,}01761111$
Ψ	$= 348{,}18380 + t.\ 0{,}0000420996$	$0{,}01537688$
Λ'	$= 113{,}32888 - t.\ 0{,}036701556$	$-13{,}40524333$
Λ''	$= 192{,}76920 - t.\ 0{,}007727299$	$-\ 2{,}82239596$
Λ'''	$= 309{,}22284 - t.\ 0{,}002061698$	$-\ 0{,}75303519$

Hieraus folgen die in gewöhnlichen Graden und ihren Theilen ausgedrückten Werthe von θ, θ', θ'', θ''' für die von 1800 (dem Mittage des 31. Decbr. 1799) in Tagen gezählte Zeit t:

		365,25 Tage.
θ	$= 109^{\circ}\,15'\,53{,}''658 + t.\,203^{\circ}\,29'\,20{,}''37615$	$164^{\circ}\,21'\,17{,}''3887$
θ'	$= 87\ \ 4\ \ 1{,}715 + t.\,101\ 22\ 29{,}14346$	$307\ \ 7\ 54{,}6492$
θ''	$= 165\ 58\ \ 5{,}743 + t.\ 50\ 19\ \ 3{,}52712$	$18\ 31\ 13{,}2795$
θ'''	$= 51\ \ 0\ 45{,}338 + t.\ 21\ 34\ 15{,}99395$	$318\ 50\ 51{,}7899$

Ferner folgen daraus die Argumente der Ungleichheiten der Längen und Radienvectoren, in Hunderteln der ganzen Peripherie ausgedrückt:

		365,25 Tage.
$a = \theta - \omega''$	$6{,}4944 + t.\,56{,}5227287$	$44{,}926650$
$a' = \theta' - \omega''$	$0{,}3284 + t.\,28{,}1576644$	$84{,}586933$
$a'' = \theta'' - \omega''$	$22{,}2454 + t.\,13{,}9751323$	$4{,}417074$
$a''' = \theta''' - \omega''$	$90{,}3132 + t.\ 5{,}9899831$	$87{,}841342$
$b = \theta - \omega'''$	$70{,}3468 + t.\,56{,}5241792$	$45{,}456460$
$b' = \theta' - \omega'''$	$64{,}1808 + t.\,28{,}1591150$	$85{,}116743$
$b'' = \theta'' - \omega'''$	$86{,}0978 + t.\,13{,}9765828$	$4{,}946884$
$b''' = \theta''' - \omega'''$	$54{,}1656 + t.\ 5{,}9914337$	$88{,}371152$
$c = \theta - 2\theta' + \omega''$	$5{,}8377 + t.\ 0{,}2073998$	$75{,}752785$
$d = \theta - 2\theta' + \omega'''$	$41{,}9853 + t.\ 0{,}2059493$	$75{,}222975$
$e = \theta - \theta'$	$6{,}1661 + t.\,28{,}3650643$	$60{,}339718$
$e' = \theta - \theta''$	$84{,}2491 + t.\,42{,}5475964$	$40{,}509577$
$e'' = \theta' - \theta''$	$78{,}0830 + t.\,14{,}1825321$	$80{,}169859$
$e''' = \theta'' - \theta'''$	$31{,}9321 + t.\ 7{,}9851492$	$16{,}575732$

$f = V$	19,6385 + t. 0,0230794	8,429765
$g = 2(\theta''' - \Pi)$	82,8790 + t. 11,9377667	60,269286
$h = \theta''' - 2\Pi + \omega'''$	28,7133 + t. 5,9463330	71,898134
$i = \Psi - \Lambda'''$	19,3449 + t. 0,0005259	0,192103

Endlich hat man die, in gewöhnlichen Graden und ihren Theilen ausgedrückten Werthe der verschiedenen Knotenlängen, wovon die Argumente der Breiten abhängen, gleichfalls für $1800 + t$:

Ψ	314° 3',44 + t. 0',002273	0° 0',8304
$A = -\Lambda'$	141 12,42 + t. 1,981884	12 3,8831
$B = -\Lambda''$	313 30,51 + t. 0,417274	2 32,4094
$C = -\Lambda'''$	115 35,05 + t. 0,111332	0 40,6639
$D = 2\Pi - \Psi$	209 36,22 + t. 9,973252	60 42,7302

Ich habe jetzt sämmtliche Elemente der am Ende dieser Abhandlung befindlichen Tafeln der Jupiterssatelliten mitgetheilt. Über diese Tafeln habe ich nur zu bemerken, dass sie sich in den Anfangsmomenten der Jahre, für welche die Epochen der mittleren Bewegungen gelten, von der gebräuchlichen Einrichtung etwas entfernen. Ich habe zwischen gemeinen Jahren und Schaltjahren keinen Unterschied gemacht, sondern, statt dessen gefordert, dass an die Zeit, für welche die Tafeln angewandt werden sollen, eine von der Jahreszahl abhängige Veränderung angebracht werde, deren nähere Angabe man auf dem ersten Blatte der Tafeln findet. Ich ziehe diese Einrichtung der gebräuchlichen vor, weil sie das gleichmässige Fortschreiten der Epochen verschiedener Jahre zur Folge hat, ohne diesen Vortheil durch eine Vermehrung der Mühe bei dem Gebrauche der Tafeln zu erkaufen.

Zum Beispiele der Anwendung der Tafeln werde ich die Berechnung des Ortes des Satelliten III, für 1835 Janr. 15. 5ᵘ 27′ 0″,2 M. Z. in Königsberg = 4ᵘ 14′ 21″2 M. Z. des ersten Meridians, hiehersetzen. Da die Jahreszahl, durch 4 dividirt, den Rest 3 lässt, so sind, der auf dem ersten Blatte der Tafeln gegebenen Vorschrift gemäss, von der Zeit 18 Stunden abzuziehen, oder die Zeit ist in Janr. 14. 10ᵘ 14′ 21″,2 zu verwandeln.

	θ''	a''	b''	c	d	e''	e'''	f
1835.	94° 10′ 51″	76,84	59,2	57,2	74,8	84,03	12,1	14,7
14 Tage . .	344 26 49	95,65	95,7	2,9	2,9	98,56	11,8	0,3
10ᵘ	20 57 56	5,96	5,9	0,1	0,1	6,05	3,4	0,0
14′ 21″,2 . .	30 5	78,45	60,8	60,2	77,8	88,64	27,3	15,0
θ''. .	100 5 41							
$v''-\theta''$. .	−8 1							
$v''=$	99°57′40″							

	Länge.	Radiusvect.
a''	 −8′ 50″	 −00029
b''	 −1 26	 + 26
c	 + 16	
d	 + 12	
e''	 +2 57	 + 52
e'''	 − 31	 + 12
f	 − 39	
	$v''-\theta''=-$ 8′ 1″	$r''=1{,}00061.a''$

	Ψ	A	B	C.	D
1835	314° 32′,50	203° 28′,3	42° 24′,8	139° 18′,3	174° 32′
Janr. 14. &c.. .	0,03	28,6	6,0	1,6	2 . 24
	314 52,53	203 56,9	42 30,8	139 19,9	176 56
$v''-\Psi$, $v''+A$, &c.	145 5,14	303 54,6	142 28,5	239 17,6	283 2

log. α'' = 4,031239	$v''-\Psi$	+	1° 42′ 30″,4
$l.\sin(v''-\Psi)$ = 9,757663	$v''+A$	−	48,1
3,788902	$v''+B$	−	6 8,7
	$v''+C$	+	1 31,1
	$v''-D$	−	6,5
	s'' =	+	1° 36′ 57″,8

12.

Ich werde jetzt mittheilen, wie die aus den Tafeln hervorgehenden Örter der Satelliten mit den beobachteten Entfernungen und Positionswinkeln verglichen worden sind.

Die scheinbare Entfernung σ eines Satelliten von dem Mittelpunkte des Planeten und sein Positionswinkel p an diesem Punkte, sind mit der Geradenaufsteigung und Abweichung α, δ des Planeten und α', δ' des Satelliten, durch die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \cos\sigma &= \sin\delta\,\sin\delta' + \cos\delta\,\cos\delta'\,\cos(\alpha'-\alpha) \\ \sin\sigma\,\cos p &= \cos\delta\,\sin\delta' - \sin\delta\,\cos\delta'\,\cos(\alpha'-\alpha) \\ \sin\sigma\,\sin p &= \cos\delta'\sin(\alpha'-\alpha) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

verbunden. Drückt man aber α', δ' durch r und die aus dem Mittelpunkte des Planeten gesehene Geradeaufsteigung und Abweichung a, d aus, oder schafft man die ersteren, durch Substitution der Ausdrücke

$$\begin{aligned} \varrho'\cos\delta'\,\cos\alpha' &= \varrho\cos\delta\,\cos\alpha + r\cos d\,\cos a \\ \varrho'\cos\delta'\,\sin\alpha' &= \varrho\cos\delta\,\sin\alpha + r\cos d\,\sin a \\ \varrho'\,\sin\delta' &= \varrho\sin\delta \qquad + r\sin d \end{aligned}$$

in welchen ϱ, ϱ' die Entfernungen des Planeten und des Satelliten von der Erde bedeuten, fort, so verwandeln sich die Formeln (1) in:

$$\left.\begin{aligned} \varrho'\cos\sigma &= \varrho + r\,[\sin d\,\sin\delta + \cos d\,\cos\delta\,\cos(a-\alpha)] \\ \varrho'\sin\sigma\,\cos p &= r\,[\sin d\,\cos\delta - \cos d\,\sin\delta\,\cos(a-\alpha)] \\ \varrho'\sin\sigma\,\sin p &= r\cos d\,\sin(a-\alpha) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Führt man m und M ein, so dass

$$\begin{aligned} \sin m\,\sin M &= \sin d \\ \sin m\,\cos M &= \cos d\,\cos(a-\alpha) \\ \cos m &= \cos d\,\sin(a-\alpha) \end{aligned}$$

ist, so ziehen sie sich in

$$\begin{aligned} \varrho'\cos\sigma &= \varrho + r\sin m\cos(M-\delta) \\ \varrho'\sin\sigma\,\cos p &= r\,\sin m\,\sin(M-\delta) \\ \varrho'\sin\sigma\,\sin p &= r\cos m \end{aligned}$$

zusammen und man erhält

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\sigma\,\cos p &= \frac{r}{R\varrho}\,\sin m\,\sin(M-\delta) \\ \operatorname{tang}\sigma\,\sin p &= \frac{r}{R\varrho}\,\cos m \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

wo R die sehr wenig von 1 verschiedene Grösse

$$1 + \frac{r}{\varrho}\sin m\cos(M-\delta)$$

bedeutet.

Wenn die Länge des aufsteigenden Knotens der Satellitenbahn auf der Jupitersbahn durch N, die Neigung durch I bezeichnet werden; der Ort ihres aufsteigenden Knotens auf dem Aequator durch $N_,$, ihre Neigung gegen diesen durch $I_,$, die Entfernung des Knotens auf der

Jupitersbahn von dem Knoten auf dem Aequator durch D, also die Entfernung des Satelliten von dem letzteren durch $v-N+D$, so gehen die in den Formeln (2) als bekannt vorausgesetzten a, d aus:

$$\left.\begin{aligned} \cos d \cos(a-N_{,}) &= \cos(v-N+D) \\ \cos d \sin(a-N_{,}) &= \sin(v-N+D)\cos I_{,} \\ \sin d &= \sin(v-N+D)\sin I_{,} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

hervor. Um die Formeln (3) anwenden zu können, muss man also, ausser den aus den Tafeln oder einer Ephemeride des Jupiter zu nehmenden ϱ, α, δ und den aus den Satellitentafeln hervorgehenden r, v, die zur Berechnung von (4) erforderlichen $N_{,}$, $I_{,}$, $D-N$ aus den Lagen der Ebenen der Bahnen des Jupiter und der Satelliten ableiten. Die Breite des Satelliten über der ersteren Bahn braucht man dann nicht aufzusuchen.

Die Länge des aufsteigenden Knotens der Jupitersbahn auf der Ecliptik $= n$, und ihre Neigung $= i$, werden in Herrn *Bouvards* Tafeln, in gewöhnlichen Graden und ihren Theilen ausgedrückt:

für 1750 $n = 97° 57' 9'',3$; $i = 1° 19' 2'',81$
- 1800 98 25 44,9 1 18 51,52
- 1850 98 54 20,5 1 18 40,23

angegeben. Verbunden mit der Schiefe der Ecliptik:

für 1750 $\omega = 23° 28' 17'',65$
- 1800 23 27 54,80
- 1850 23 27 31,95

ergeben diese Bestimmungen den Ort des aufsteigenden Knotens der Jupitersbahn auf dem Aequator $= n_{,}$, ihre Neigung gegen diesen grössten Kreis $= i_{,}$ und die Entfernung ihres aufsteigenden Knotens auf der Ecliptik von dem aufsteigenden Knoten auf dem Aequator $= C$:

für 1750 $n_{,} = 3° 17' 49'',32$; $i_{,} = 23° 19' 25'',50$; $C = 94° 55' 35'',52$
- 1800 3 17 14,99 18 24,49 95 24 41,63
- 1850 3 16 39,83 17 23,66 95 53 48,59

woraus die Ausdrücke von $n_{,}$, $i_{,}$, $C-n$ für $1800+t$:

$$\begin{aligned} n_{,} &= \;\;\, 3° 17' 14'',99 - t\,.\,0'',6949 - tt\,.\,0'',000166 \\ i_{,} &= 23\;18\;24,49 - t\,.\,1,2184 + tt\,.\,0,000036 \\ C-n &= 356\;58\;56,73 + t\,.\,0,6187 + tt\,.\,0,000170 \end{aligned}$$

folgen. Diese Bestimmung der Lage der Jupitersbahn gegen den Aequator ist die in meinen Rechnungen angewandte.

Da der Ausdruck der Breite des Satelliten über der Ebene der Jupitersbahn

$$\sin s = \sin I \sin(v - N)$$

ist, und man die Sinus von s und I mit den Bögen verwechseln kann, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} I \sin N = \text{Angabe der Tafeln für } v = 180^\circ \\ I \cos N = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ v = 90^\circ \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

wodurch I und N bekannt werden. $I_,$, $N_,$, D gehen dann aus folgenden Formeln hervor:

$$\left.\begin{array}{l} \sin\tfrac{1}{2} I_, \sin\tfrac{1}{2}(D - N_, + n_,) = \sin\tfrac{1}{2}(i_, - I) \sin\tfrac{1}{2}(C + N - n) \\ \sin\tfrac{1}{2} I_, \cos\tfrac{1}{2}(D - N_, + n_,) = \sin\tfrac{1}{2}(i_, + I) \cos\tfrac{1}{2}(C + N - n) \\ \cos\tfrac{1}{2} I_, \sin\tfrac{1}{2}(D + N_, - n_,) = \cos\tfrac{1}{2}(i_, - I) \sin\tfrac{1}{2}(C + N - n) \\ \cos\tfrac{1}{2} I_, \cos\tfrac{1}{2}(D + N_, - n_,) = \cos\tfrac{1}{2}(i_, + I) \cos\tfrac{1}{2}(C + N - n) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Diese Grössen erfahren sehr langsame periodische Änderungen, so dass es hinreicht, ihre Werthe von 100 zu 100 Tagen zu berechnen.

Um auch die Nutation nicht zu vernachlässigen, muss man die der Länge $= \varDelta\psi$ zu v und n, die der Schiefe der Ecliptik $= \varDelta\omega$ zu ω hinzusetzen. Hat man $I_,$, $N_,$ und D ohne Rücksicht auf die Nutation berechnet, so muss man ihren so gefundenen Werthen hinzusetzen:

$$\left.\begin{array}{l} \varDelta I_, = \varDelta\omega \,.\, \cos N_, - \varDelta\psi \,.\, \sin\omega \,.\, \sin N_, \\ \varDelta N_, = -[\varDelta\omega \sin N_, + \varDelta\psi \sin\omega \,.\, \cos N_,] \operatorname{cotg} I_, + \varDelta\psi \cos\omega \\ \varDelta D = [\varDelta\omega \sin N_, + \varDelta\psi \sin\omega \,.\, \cos N_,] \operatorname{cosec} I_, \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (7)$$

13.

Bei der Anwendung dieser Vorschriften zur Vergleichung der aus den Tafeln berechneten Örter der Satelliten mit den beobachteten Werthen von σ und p, habe ich $\log\varrho$, α, δ aus der in dem *Astronomischen Jahrbuche* von *Encke* enthaltenen Ephemeride des Jupiter genommen, und zwar für die Zeit wenn das Licht, welches zur Beobachtungszeit auf der Erde anlangte, den Jupiter verliess. Diese Ephemeriden sind für einen Meridian berechnet, dessen Unterschied von dem *ersten Meridiane* 44′ 14″ Zeit östlich ist; wenn die Königsberger mittlere Zeit einer

Beobachtung durch t bezeichnet wird, die ihr entsprechende Zeit des ersten Meridians durch $t - 1^u\,12'\,39''$, so müssen also log ϱ, α, δ, aus den *Encke*schen Ephemeriden, für die Zeit

$$t - 28'\,25'' - \varrho\,.\,493'',15$$

genommen werden. In die Satellitentafeln muss man aber mit der Zeit

$$t - 1^u\,12'\,39'' - \varrho\,.\,493'',15$$

eingehen.

Die Satellitentafeln ergeben nicht unmittelbar r, sondern $\frac{r}{a}$. Ich habe die $\frac{r}{a} = 1$ entsprechenden grössten Elongationen der Satelliten, für die mittlere Entfernung (ϱ) des Planeten, hypothetisch angenommen, nämlich

für I $\varDelta = 111'',7256$
- II $\varDelta' = 177,7602$
- III $\varDelta'' = 283,5421$
- IV $\varDelta''' = 498,7006$

Setzt man die mittlere Entfernung des Planeten, den *Bouvard*schen Tafeln zufolge, $(\varrho) = 5{,}20273$, $\log(\varrho) = 0{,}7162313$, und versteht man, um kein neues Zeichen einführen zu dürfen, unter r den aus den Satellitentafeln genommenen Werth von $\frac{r}{a}$, so folgen die in den Formeln (3) anzuwendenden Werthe von r:

für I $r = (\varrho)\sin\varDelta\,.\,r$; $\log.\omega(\varrho)\sin\varDelta = 2{,}7643840$
- II $r' = (\varrho)\sin\varDelta'\,.\,r'$; $\log.\omega(\varrho)\sin\varDelta' = 2{,}9660658$
- III $r'' = (\varrho)\sin\varDelta''\,.\,r''$; $\log.\omega(\varrho)\sin\varDelta'' = 3{,}1688488$
- IV $r''' = (\varrho)\sin\varDelta'''\,.\,r'''$; $\log.\omega(\varrho)\sin\varDelta''' = 3{,}4140707$

Die Werthe von $D - N$, $\log\cos I_{,}$, $\log\sin I_{,}$, $N_{,}$, für jeden 100ten Tag während der Zeit, in welche die Beobachtungen der Satelliten fallen, werde ich hier gleichfalls anführen:

Satellit I.

	$D-N$	$l\cos I_{,}$	$l\sin I_{,}$	$N_{,}$
	° ′ ″			° ′ ″
1832 Nov. 2	1 51 44,2	9,956329	9,630250	−2 4 18,4
1833 Febr. 9	51 47,0	328	253	4 22,0
May 20	51 49,7	328	255	4 25,9
Aug. 28	51 53,1	327	257	4 29,9
Decbr. 6	51 56,6	327	259	4 33,9
1834 März 16	52 0,2	327	260	4 37,8
Juni 24	52 3,6	327	260	4 41,8
Octb. 2	52 8,2	326	261	4 46,1
1835 Janr. 10	52 12,2	326	263	4 50,4

Satellit II.

1833 Aug. 28	1° 52′ 58″,3	9,954166	9,639702	—2° 6′ 13″,1
Decb. 6	56 18,0	178	654	9 52,2
1834 März 16	59 36,8	194	583	13 30,3

Satellit III.

1832 Octb. 13	1° 30′ 4″,9	9,956442	9,629743	—1° 40′ 19″,5
1833 Jan. 20	29 41,8	438	760	39 54,9
April 30	29 19,8	434	776	39 31,6
Aug. 8	28 59,3	430	794	39 9,4
Nov. 16	28 40,3	426	812	38 48,7
1834 Febr. 24	28 22,4	421	833	38 29,1
Juni 4	28 5,6	417	856	38 11,0
Sept. 12	27 50,0	411	882	37 54,0
Decb. 21	27 33,3	404	912	37 37,1
1835 März 31	27 15,7	397	945	37 20,3
1839 März 30	1 23 12,9	9,956265	9,630542	—1 32 35,8
Juli 8	23 1,2	257	574	32 21,7
Octb. 16	22 50,8	249	608	32 9,1

Satellit IV.

1832 Octb. 13	0° 57′ 38″,0	9,956086	9,631337	—1° 4′ 51″,0
1833 Jan. 20	57 38,0	088	327	4 51,2
April 30	57 40,2	090	317	4 54,1
Aug. 8	57 45,0	092	308	4 59,7
Nov. 16	57 52,1	094	300	5 7,8
1834 Febr. 24	58 1,7	096	293	5 18,4
Juni 4	58 13,4	097	288	5 30,9
Sept. 12	58 26,5	097	287	5 45,0
Decb. 21	58 40,4	097	290	6 0,5
1835 März 31	58 53,9	095	296	6 16,2
1839 März 30	0 59 43,4	9,956058	9,631464	—1 6 53,6
Juli 8	59 47,8	061	449	6 56,9
Octb. 16	59 54,7	064	435	7 2,9

14.

Indem die Beobachtungen der Satelliten gemacht worden sind, um dadurch Beiträge zur Bestimmung entweder des Elementes Δ, Δ', Δ'', Δ''' allein, oder auch anderer Elemente ihrer Bewegungen zu erhalten, wird

die Aufsuchung der Änderungen nöthwendig, welche die berechneten Werthe von σ und p durch Änderungen dieser Elemente erfahren. Ich werde daher σ und p in Beziehung auf $\varDelta$, die mittlere Länge θ, $e\sin\omega = \lambda$, $e\cos\omega = \lambda'$, N und I differentiiren.

Substituirt man die Formeln (4) in den Formeln (2) und setzt man σ für $\omega\,\mathrm{tang}\,\sigma$, und $\varDelta$ für $\omega\sin\varDelta$, so erhält man statt der letzteren:

$$\sigma\sin p = \frac{(\varrho)\varDelta}{R\,.\,\varrho}\,.\,r\left[\cos I_{,}\cos(\alpha-N_{,})\sin(v-N+D) - \sin(\alpha-N_{,})\cos(v-N+D)\right]$$

$$\sigma\cos p = \frac{(\varrho)\varDelta}{R\,.\,\varrho}\,.\,r\left[(\cos\delta\sin I_{,} - \sin\delta\cos I_{,}\sin(\alpha-N_{,}))\sin(v-N+D) - \sin\delta\cos(\alpha-N_{,})\cos(v-N+D)\right]$$

und wenn man f, F, g, G durch

$$\left.\begin{aligned}
\sin f\cos F &= \cos(\alpha-N_{,})\cos I_{,}\\
\sin f\sin F &= -\sin(\alpha-N_{,})\\
\cos f &= -\cos(\alpha-N_{,})\sin I_{,}\\
\sin g\cos G &= \cos\delta\sin I_{,} - \sin\delta\cos I_{,}\sin(\alpha-N_{,})\\
\sin g\sin G &= -\sin\delta\cos(\alpha-N_{,})\\
\cos g &= \cos\delta\cos I_{,} + \sin\delta\sin I_{,}\sin(\alpha-N_{,})
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ (8)$$

bestimmt:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma\sin p &= \frac{(\varrho)\varDelta}{\varrho R}\sin f\,.\,r\sin(v-N+D+F)\\
\sigma\cos p &= \frac{(\varrho)\varDelta}{\varrho R}\sin g\,.\,r\sin(v-N+D+G)
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ (9)$$

wofür ich, um abzukürzen, schreiben werde:

$$\sigma\sin p = f'\,.\,r\sin(F'+v)$$
$$\sigma\cos p = g'\,.\,r\sin(G'+v)$$

Diese Formeln werde ich in Beziehung auf $\varDelta$, θ, λ, λ', N, I differentiiren, dabei aber den unerheblichen Einfluss der Änderungen dieser Elemente auf R vernachlässigen. Ich werde nur die zweite Formel verfolgen, indem g, G in f, F übergehen, wenn $\delta = 90°$ angenommen und $\alpha - 90°$ für α gesetzt wird, so dass also die erste Formel als ein besonderer Fall der zweiten angesehen werden kann. — In Beziehung auf $\varDelta$ ist der Differentialquotient offenbar

$$\frac{d(\sigma\cos p)}{d\varDelta} = \frac{\sigma\cos p}{\varDelta}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (10)$$

In Beziehung auf die drei, den Ort des Satelliten in der Ebene seiner

Bahn bestimmenden Elemente θ, λ, λ', können die Differentialquotienten zugleich aufgesucht werden. Schreibt man die zu differentiirende Grösse:

$$\sigma \cos p = g' [\sin(G'+\omega) \,.\, r\cos(v-\omega) + \cos(G'+\omega) \,.\, r\sin(v-\omega)]$$

so wird ihr Differential:

$$d(\sigma\cos p) = g'\sin(G'+\omega)\, d(r\cos(v-\omega)) + g'\cos(G'+\omega)\, d(r\sin(v-\omega)) + rg'\cos(G'+v)\, d\omega$$

Durch die excentrische Anomalie ε ausgedrückt, hat man

$$r\cos(v-\omega) = \cos\varepsilon - e$$
$$r\sin(v-\omega) = \sin\varepsilon\sqrt{(1-ee)}$$
$$\theta-\omega = \varepsilon - e\sin\varepsilon$$

und durch Differentiirung dieser Ausdrücke:

$$d(r\cos(v-\omega)) = -d\varepsilon \,.\, \sin\varepsilon - de$$
$$d(r\sin(v-\omega)) = d\varepsilon \,.\, \cos\varepsilon\sqrt{(1-ee)} - de \,.\, \frac{e\sin\varepsilon}{\sqrt{(1-ee)}}$$
$$d\theta - d\omega = d\varepsilon\,(1-e\cos\varepsilon) - de \,.\, \sin\varepsilon$$

oder, wenn man $d\varepsilon$ aus den beiden ersten Differentialen eliminirt:

$$d(r\cos(v-\omega)) = -d(\theta-\omega)\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon} - de \,.\left(1+\frac{\sin\varepsilon^2}{1-e\cos\varepsilon}\right)$$
$$d(r\sin(v-\omega)) = d(\theta-\omega)\frac{\cos\varepsilon\sqrt{(1-ee)}}{1-e\cos\varepsilon} + de\left(\frac{\cos\varepsilon\sqrt{1-ee}}{1-e\cos\varepsilon} - \frac{e}{\sqrt{1-ee}}\right)\sin\varepsilon$$

oder

$$d(r\cos(v-\omega)) = -d(\theta-\omega)\frac{\sin(v-\omega)}{\sqrt{(1-ee)}} - de\left(1+\frac{\sin\varepsilon\sin(v-\omega)}{\sqrt{(1-ee)}}\right)$$
$$d(r\sin(v-\omega)) = d(\theta-\omega)\frac{\cos(v-\omega)+e}{\sqrt{(1-ee)}} + de \,.\, \frac{\sin\varepsilon \,.\, \cos(v-\omega)}{\sqrt{(1-ee)}}$$

Die Substitution dieser Ausdrücke giebt:

$$d(\sigma\cos p) = \frac{d\theta}{\sqrt{(1-ee)}} g'\left[\cos(G'+v) + e\cos(G'+\omega)\right]$$
$$+ de \,.\, g'\left[\cos(G'+v)\frac{\sin\varepsilon}{\sqrt{(1-ee)}} - \sin(G'+\omega)\right]$$
$$+ d\omega \,.\, g'\left[\cos(G'+v)\left(r-\frac{1}{\sqrt{(1-ee)}}\right) - \frac{e\cos(G'+\omega)}{\sqrt{(1-ee)}}\right]$$

oder, anders geschrieben:

$$d(\sigma\cos p) = d\theta\,.\,g'\left[\cos(G'+v)\frac{\sqrt{(1-ee)}}{r} + \sin(G'+v)\,\frac{e\sin(v-\omega)}{\sqrt{(1-ee)}}\right]$$
$$+\; de\,.\,g'\left[\cos(G'+v)\left(\frac{r}{1-ee}+1\right)\sin(v-\omega) - \sin(G'+v)\cos(v-\omega)\right]$$
$$+\; d\omega\,.\,g'\left[\cos(G'+v)\left(r-\frac{\sqrt{(1-ee)}}{r}\right) - \sin(G'+v)\,\frac{e\sin(v-\omega)}{\sqrt{(1-ee)}}\right]$$

Wenn man $d\lambda$ und $d\lambda'$ einführt, also de und $d\omega$ durch die Gleichungen

$$de = d\lambda\,.\sin\omega + d\lambda'\,.\cos\omega$$
$$e\,d\omega = d\lambda\,.\cos\omega - d\lambda'\,.\sin\omega$$

eliminirt und $\frac{\sigma}{r}\cos p$ für $g'\sin(G'+v)$ setzt, erhält man aus diesem Ausdrucke:

$$\frac{d(\sigma\cos p)}{d\theta} = g'\cos(G'+v)\,\frac{\sqrt{(1-ee)}}{r} + \sigma\cos p\,.\,\frac{e\sin(v-\omega)}{r\sqrt{(1-ee)}}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (11)$$

$$\frac{d(\sigma\cos p)}{d\lambda} = g'\cos(G'+v)\left[\left(r-\frac{\sqrt{(1-ee)}}{r}\right)\frac{\cos\omega}{e} + \left(\frac{r}{1-ee}+1\right)\sin\omega\sin(v-\omega)\right]$$
$$-\frac{\sigma\cos p}{r}\left[\sin\omega\cos(v-\omega) + \frac{\cos\omega\sin(v-\omega)}{\sqrt{(1-ee)}}\right].\;(12)$$

$$\frac{d(\sigma\cos p)}{d\lambda'} = g'\cos(G'+v)\left[-\left(r-\frac{\sqrt{(1-ee)}}{r}\right)\frac{\sin\omega}{e} + \left(\frac{r}{1-ee}+1\right)\cos\omega\sin(v-\omega)\right]$$
$$-\frac{\sigma\cos p}{r}\left[\cos\omega\cos(v-\omega) - \frac{\sin\omega\sin(v-\omega)}{\sqrt{(1-ee)}}\right].\;(13)$$

Um die Differentialquotienten in Beziehung auf N und I zu erhalten, kann man von dem Ausdrucke

$$\sigma\cos p = \frac{(\varrho)\Delta}{\varrho R}\,r\,[(\cos\delta\sin I_{,} - \sin\delta\cos I_{,}\sin(\alpha-N_{,})\sin(v-N+D) - \sin\delta\cos(\alpha-N_{,})\cos(v-N+D)]$$

ausgehen. Seine Differentiirung in Beziehung auf Alles was von N und I abhängt, ergiebt

$$d(\sigma\cos p) = \frac{(\varrho)\Delta}{\varrho R}\,.\,r\left\{\begin{array}{l}[\cos(v-N+D)\,(\cos\delta\sin I_{,} - \sin\delta\cos I_{,}\sin(\alpha-N_{,}))\\ \qquad + \sin(v-N+D)\,.\sin\delta\cos(\alpha-N_{,})]\;d(D-N)\\ +[\sin(v-N+D)\sin\delta\cos I_{,}\cos(\alpha-N_{,}) - \cos(v-N+D)\sin\delta\sin(\alpha-N_{,})]\,dN_{,}\\ +\sin(v-N+D)\;(\cos\delta\cos I_{,} + \sin\delta\sin I_{,}\sin(\alpha-N_{,}))\;dI_{,}\end{array}\right\}$$

Die Differentiirung des sphärischen Dreiecks zwischen dem Aequator, der Jupitersbahn und der Satellitenbahn ergiebt aber

$$d(D-N) = -dN\left(1-\cos I + \frac{\sin I\cos D}{\operatorname{tang} I_{,}}\right) - dI\,.\,\frac{\sin D}{\operatorname{tang} I_{,}}$$
$$dN_{,} = dN\,.\,\frac{\sin I\cos D}{\sin I_{,}} + dI\,.\,\frac{\sin D}{\sin I_{,}}$$
$$dI_{,} = -dN\,.\sin I\sin D + dI\,.\cos D$$

und aus der Substitution des von dN abhängigen Theils dieser Differentiale geht hervor

$$\frac{d(\varrho\cos p)}{\sin I\,dN}=\frac{(\varrho)\Delta}{\varrho R}r\left\{\begin{array}{l}-\cos(v-N)\,[\cos\delta\cos I_{,}+\sin\delta\sin I_{,}\sin(\alpha-N_{,})]\\ -\tang\tfrac{1}{2}I\,[\cos(v-N+D)\,(\cos\delta\sin I_{,}-\sin\delta\cos I_{,}\sin(\alpha-N_{,}))\\ \qquad+\sin(v-N+D)\sin\delta\cos(\alpha-N_{,})\end{array}\right\}$$

oder, den Formeln (8) zufolge:

$$\frac{d(\sigma\cos p)}{\sin I\,dN}=-\frac{(\varrho)\Delta}{\varrho R}r\cos g\cos(v-N)-\tang\tfrac{1}{2}I\,.\,r\,.\,g'\cos(G'+v)\,.\,.\,.\,.\,(14)$$

so wie auch aus der Substitution des von dI abhängigen Theils der Differentiale

$$\frac{d(\sigma\cos p)}{dI}=\frac{(\varrho)\Delta}{\varrho R}r\sin(v-N)\,(\cos\delta\cos I_{,}+\sin\delta\sin I_{,}\sin(\alpha-N_{,}))$$

oder

$$\frac{d(\sigma\cos p)}{dI}=\frac{(\varrho)\Delta}{\varrho R}r\cos g\sin(v-N)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(15)$$

Indem man ähnliche Ausdrücke für die Differentialquotienten von $\sigma\sin p$, und

$$d\sigma=\cos p\,d(\sigma\cos p)+\sin p\,d(\sigma\sin p)$$
$$\sigma\,dp=-\sin p\,d(\sigma\cos p)+\cos p\,d(\sigma\sin p)$$

hat, kennt man auch die Differentialquotienten von σ und p in Beziehung auf die 6 Elemente. Setzt man

$$k\sin K=g'\cos(G'+v)=\frac{(\varrho)\Delta}{\varrho R}\sin g\cos(v-N+D+G)$$
$$k\cos K=f'\cos(F'+v)=\frac{(\varrho)\Delta}{\varrho R}\sin f\cos(v-N+D+F)$$

und

$$l\sin L=\frac{(\varrho)\Delta}{\varrho R}\cos g$$
$$l\cos L=\frac{(\varrho)\Delta}{\varrho R}\cos f$$

und ferner, um abzukürzen,

$$\mu=\left(r-\frac{\sqrt{(1-ee)}}{r}\right)\frac{\cos\omega}{e}+\left(\frac{r}{1-ee}+1\right)\sin\omega\sin(v-\omega)$$
$$\mu'=-\left(r-\frac{\sqrt{(1-ee)}}{r}\right)\frac{\sin\omega}{e}+\left(\frac{r}{1-ee}+1\right)\cos\omega\sin(v-\omega)$$
$$\nu=\sin\omega\cos(v-\omega)+\frac{\cos\omega\sin(v-\omega)}{\sqrt{(1-ee)}}$$
$$\nu'=\cos\omega\cos(v-\omega)-\frac{\sin\omega\sin(v-\omega)}{\sqrt{(1-ee)}}$$

so erhält man endlich:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\varDelta} &= \frac{\sigma}{\varDelta}\\
\frac{d\sigma}{d\theta} &= k\sin(K+p)\,.\,\frac{\sqrt{1-ee}}{r} + \frac{\sigma}{r}\,.\,\frac{e\sin(v-\omega)}{\sqrt{(1-ee)}}\\
\frac{d\sigma}{d\lambda} &= k\sin(K+p)\,.\,\mu \qquad - \frac{\sigma}{r}\,.\,\nu\\
\frac{d\sigma}{d\lambda'} &= k\sin(K+p)\,.\,\mu' \qquad - \frac{\sigma}{r}\,\nu'\\
\frac{d\sigma}{\sin I\, dN} &= -k\sin(K+p)\; r\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}I - l\sin(L+p)\; r\cos(v-N)\\
\frac{d\sigma}{dI} &= l\sin(L+p)\; r\sin(v-N)
\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

und

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\sigma dp}{d\varDelta} &= 0\\
\frac{\sigma dp}{d\theta} &= k\cos(K+p)\,\frac{\sqrt{1-ee}}{r}\\
\frac{\sigma dp}{d\lambda} &= k\cos(K+p)\;\mu\\
\frac{\sigma dp}{d\lambda'} &= k\cos(K+p)\;\mu'\\
\frac{\sigma dp}{\sin I\, dN} &= -k\cos(K+p)\; r\operatorname{tgt}\tfrac{1}{2}I - l\cos(L+p)\; r\cos(v-N)\\
\frac{\sigma dp}{dI} &= l\cos(L+p)\; r\sin(v-N)
\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Die Excentricitäten der Bahnen der Jupiterssatelliten sind so klein, dass sie ohne erheblichen Nachtheil, in den Ausdrücken der Differentialquotienten von σ und p vernachlässigt werden können. Geschieht dieses so verwandeln sich die eben gegebenen Formeln in:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\varDelta} &= \frac{\sigma}{\varDelta}\\
\frac{d\sigma}{d\theta} &= k\sin(K+p)\\
\frac{d\sigma}{d\lambda} &= -k\sin(K+p)\; 2\cos v - \sigma\sin v\\
\frac{d\sigma}{d\lambda'} &= k\sin(K+p)\; 2\sin v - \sigma\cos v\\
\frac{d\sigma}{\sin I\, dN} &= -l\sin(L+p)\cos(v-N) - k\sin(K+p)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}I\\
\frac{d\sigma}{dI} &= l\sin(L+p)\sin(v-N)
\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\ldots\ldots (16^{*})$$

und

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\sigma dp}{d\Delta} &= 0\\
\frac{\sigma dp}{d\theta} &= k\cos(K+p)\\
\frac{\sigma dp}{d\lambda} &= -k\cos(K+p)\;2\cos v\\
\frac{\sigma dp}{d\lambda'} &= k\cos(K+p)\;2\sin v\\
\frac{\varrho dp}{\sin I dN} &= -l\cos(L+p)\cos(v-N) - k\cos(K+p)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}I\\
\frac{\sigma dp}{dI} &= l\cos(L+p)\sin(v-N)
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\;(17^*)$$

Diese Formeln sind die von mir zur Rechnung angewandten. Wenn man beabsichtigte, die Coefficienten von Gliedern der Ausdrüke der Länge und des Radiusvectors eines Satelliten, welche nicht unmittelbar von seinen elliptischen Elementen abhangen, durch eine Reihe beobachteter Entfernungen und Positionswinkel zu bestimmen, so würden die in Beziehung auf Δ und θ genommenen Differentialquotienten auch dabei Anwendung finden.

15.

Damit man nicht allein das Verhalten der gemachten Beobachtungen der Satelliten zu den Tafeln ihrer Bewegung und den im 13ten § angeführten Werthen von Δ, Δ', Δ'', Δ''', sondern auch den Einfluss übersehen könne, welchen Änderungen der Elemente der Tafeln darauf äussern, werde ich die Resultate der Vergleichungen der einzelnen Beobachtungen und diesen Einfluss hier mittheilen. Wenn $\delta\sigma$ und $\sigma\delta p$ die nach einer Veränderung der Elemente übrigbleibenden Unterschiede zwischen der Rechnung und Beobachtung bedeuten, werde ich

$$\begin{aligned}
\delta\sigma &= n + ap + bq + cr + ds + et + fu\\
\sigma\delta p &= n' \qquad\;\; + b'q + c'r + d's + e't + f'u
\end{aligned}$$

setzen und unter a, b, $c\ldots$, b', $c'\ldots$ die durch die Formeln (16*) und (17*) berechneten Coefficienten, so wie unter p, q, r, s, t, u resp.

$$\delta\Delta,\ \frac{\delta\theta}{206,''265},\ \frac{\delta\lambda}{206,''265},\ \frac{\delta\lambda'}{206,''265},\ \frac{\sin I\delta N}{206,''265},\ \frac{\delta I}{206,''265}$$

verstehen. Die folgenden Tafeln enthalten n, a, b, c,....; n', b', c'.... für jedes der § 2. bis § 7. angeführten beobachteten Momente.

Satellit I. Entfernungen.

	n	a	b	c	d	e	f
1	+ 0,203″	1,145	+ 0,0044	+ 0,0204	+ 0,1267	0,0000	+ 0,0001
2	− 0,630	1,010	+ 0,0766	− 0,1533	+ 0,1103	+ 0,0022	+ 0,0036
3	+ 0,365	1,196	+ 0,0321	+ 0,1088	− 0,1001	+ 0,0008	+ 0,0007
4	− 0,193	1,139	+ 0,0662	− 0,1449	+ 0,1132	+ 0,0015	+ 0,0026
5	+ 0,307	1,294	+ 0,0057	+ 0,0841	− 0,1174	+ 0,0001	+ 0,0001
6	+ 0,017	1,225	− 0,0441	− 0,0516	+ 0,1548	− 0,0015	+ 0,0004
7	− 0,087	1,092	− 0,0780	− 0,0930	+ 0,0476	− 0,0028	+ 0,0019
8	+ 0,108	1,165	+ 0,0654	+ 0,1431	− 0,1161	+ 0,0014	+ 0,0026
9	+ 0,237	1,255	− 0,0416	+ 0,0507	− 0,1544	− 0,0014	+ 0,0002
10	− 0,166	0,734	− 0,1200	− 0,0735	+ 0,2429	− 0,0054	+ 0,0081
11	+ 0,170	0,517	− 0,1327	+ 0,1397	− 0,2531	− 0,0076	+ 0,0156
12	− 0,061	0,977	+ 0,0973	+ 0,1721	− 0,1418	+ 0,0016	+ 0,0060
13	− 0,221	1,107	− 0,0774	− 0,0413	+ 0,1941	− 0,0027	+ 0,0002
14	− 0,015	1,200	− 0,0598	+ 0,0389	− 0,1750	− 0,0020	+ 0,0006
15	− 0,040	0,677	− 0,1245	− 0,0713	+ 0,2503	− 0,0063	+ 0,0044
16	− 0,088	0,601	+ 0,1288	− 0,1780	+ 0,1972	− 0,0002	+ 0,0152
17	− 0,077	0,458	− 0,1346	+ 0,0910	− 0,2585	− 0,0092	+ 0,0173
18	+ 0,115	0,830	− 0,1103	+ 0,0460	− 0,2348	− 0,0048	+ 0,0052
19	− 0,204	1,198	+ 0,0519	+ 0,1177	− 0,1213	+ 0,0010	+ 0,0019
20	− 0,283	0,973	− 0,0879	+ 0,0265	− 0,1826	− 0,0032	+ 0,0022
21	− 0,208	0,472	− 0,1282	+ 0,0729	− 0,2513	− 0,0082	+ 0,0138
22	− 0,491	0,660	− 0,1039	+ 0,0395	− 0,2171	− 0,0044	+ 0,0052
23	+ 0,167	0,968	− 0,0321	− 0,0323	+ 0,1215	− 0,0025	0,0000
24	+ 0,491	0,446	− 0,1259	− 0,2039	+ 0,1560	− 0,0043	+ 0,0167

16.

Satellit II. Entfernungen.

	n	a	b	c	d	e	f
1	− 0,501″	1,230	+ 0,0164	− 0,0836	+ 0,1692	+ 0,0005	+ 0,0003
2	+ 0,073	1,262	+ 0,0341	+ 0,1571	− 0,1767	+ 0,0009	+ 0,0009
3	− 0,315	1,282	− 0,0411	− 0,1069	+ 0,2152	− 0,0041	− 0,0003
4	− 0,269	0,722	+ 0,1928	− 0,2963	+ 0,2777	+ 0,0003	+ 0,0213
5	+ 0,220	0,463	− 0,2142	+ 0,1640	− 0,4042	− 0,0172	+ 0,0300
6	+ 0,097	1,255	− 0,0603	+ 0,0794	− 0,2426	− 0,0020	− 0,0002
7	+ 0,263	0,545	+ 0,2098	− 0,2899	+ 0,3183	− 0,0030	+ 0,0318
8	− 0,036	1,062	− 0,1380	− 0,0672	+ 0,3267	− 0,0061	+ 0,0034
9	+ 0,074	0,250	+ 0,2164	− 0,2478	+ 0,3578	+ 0,0053	− 0,0770
10	+ 0,015	1,202	− 0,0961	− 0,0609	+ 0,2796	− 0,0036	+ 0,0006
11	− 0,359	0,718	+ 0,1920	+ 0,2866	− 0,2885	+ 0,0090	+ 0,0592
12	+ 0,063	1,078	+ 0,1355	− 0,2490	+ 0,2171	+ 0,0018	+ 0,0085

13	+ 0,308″	0,567	+ 0,2063	+ 0,2779	— 0,3214	— 0,0034	+ 0,0286
14	— 0,079	0,354	+ 0,2164	+ 0,2534	— 0,3565	— 0,0110	+ 0,0475
15	— 0,051	0,483	— 0,2083	+ 0,1205	— 0,4059	— 0,0166	+ 0,0240
16	+ 0,161	0,462	+ 0,1781	— 0,2089	+ 0,2998	— 0,0061	+ 0,0326
17	+ 0,369	0,858	+ 0,0960	— 0,1821	+ 0,1635	+ 0,0009	+ 0,0049

17.

Satellit III. Entfernungen.

	n	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
1	— 0,371″	1,234	+ 0,0156	— 0,0506	— 0,3474	— 0,0001	+ 0,0004
2	— 0,664	0,795	— 0,2611	— 0,1766	+ 0,5406	— 0,0100	+ 0,0138
3	+ 0,492	1,037	+ 0,1851	+ 0,3848	— 0,2744	+ 0,0042	+ 0,0078
4	— 0,125	1,173	— 0,1454	— 0,1244	+ 0,4239	— 0,0048	+ 0,0019
5	+ 0,350	1,287	+ 0,0104	+ 0,2102	— 0,3210	+ 0,0002	+ 0,0001
6	+ 0,256	0,865	— 0,2684	+ 0,1622	— 0,5675	— 0,0108	+ 0,0130
7	— 0,113	1,076	+ 0,2035	— 0,4034	+ 0,3097	+ 0,0043	+ 0,0093
8	— 0,342	1,241	— 0,1046	— 0,1328	+ 0,3870	— 0,0033	+ 0,0005
9	+ 0,189	1,030	— 0,2255	+ 0,1233	— 0,5230	— 0,0083	+ 0,0066
10	— 0,571	1,002	+ 0,2365	— 0,4753	+ 0,3443	+ 0,0043	+ 0,0104
11	— 0,095	1,271	— 0,0836	— 0,1384	+ 0,3783	— 0,0026	+ 0,0001
12	— 0,219	0,650	— 0,3188	— 0,2098	+ 0,6296	— 0,0147	+ 0,0261
13	— 0,247	1,123	— 0,1902	+ 0,1073	— 0,4841	— 0,0065	+ 0,0037
14	— 0,061	1,307	— 0,0216	— 0,1794	+ 0,3271	+ 0,0009	— 0,0002
15	— 0,632	0,781	— 0,2946	— 0,1651	+ 0,6074	— 0,0132	+ 0,0172
16	+ 0,307	0,370	+ 0,3497	+ 0,4410	— 0,5528	— 0,0057	+ 0,0669
17	+ 0,030	0,933	— 0,2598	— 0,1191	+ 0,5708	— 0,0103	+ 0,0097
18	+ 0,028	0,166	+ 0,3351	+ 0,3626	— 0,5657	— 0,0292	+ 0,1512
19	+ 0,139	1,088	+ 0,2061	+ 0,3898	— 0,3360	+ 0,0035	+ 0,0098
20	+ 0,186	1,253	— 0,1070	+ 0,1110	— 0,3999	— 0,0033	+ 0,0002
21	+ 0,017	0,557	— 0,3334	+ 0,2110	— 0,6520	— 0,0183	+ 0,0316
22	+ 0,003	1,001	+ 0,2355	+ 0,4082	— 0,3673	+ 0,0033	+ 0,0132
23	+ 0,096	0,876	+ 0,2679	+ 0,4241	— 0,4109	+ 0,0024	+ 0,0182
24	+ 0,321	1,188	— 0,1358	— 0,0802	+ 0,4249	— 0,0026	+ 0,0006
25	— 0,172	1,060	— 0,1822	+ 0,0612	— 0,4781	— 0,0061	+ 0,0027
26	— 0,163	0,970	— 0,2752	+ 0,0253	— 0,6174	— 0,0067	+ 0,0052
27	— 0,014	0,399	+ 0,2985	— 0,3506	+ 0,4965	— 0,0063	+ 0,0403
28	+ 0,298	0,840	— 0,1590	— 0,0659	+ 0,3917	— 0,0042	+ 0,0027
29	— 0,285	1,000	— 0,0120	+ 0,1287	— 0,2539	— 0,0002	— 0,0001
30	— 0,572	0,976	+ 0,0273	+ 0,1653	— 0,2289	+ 0,0004	+ 0,0004
31	+ 0,472	0,938	— 0,0454	— 0,1288	+ 0,2493	— 0,0022	+ 0,0001
32	— 0,263	0,873	+ 0,1032	+ 0,2456	— 0,2256	+ 0,0009	+ 0,0028
33	— 0,677	1,113	+ 0,1191	— 0,3951	+ 0,0150	+ 0,0033	— 0,0007

34	+ 0″,428	1,201	— 0,0166	+ 0,3156	— 0,1342	+ 0,0002	+ 0,0001
35	— 0,116	0,798	+ 0,2771	— 0,5971	+ 0,0408	+ 0,0125	+ 0,0096
36	— 0,169	1,172	— 0,0978	+ 0,2887	— 0,2551	— 0,0015	+ 0,0027
37	— 0,348	0,961	+ 0,2042	+ 0,4858	— 0,0720	+ 0,0061	+ 0,0039
38	+ 0,322	1,114	+ 0,1214	— 0,3915	+ 0,0737	+ 0,0028	+ 0,0003
39	+ 0,096	0,200	— 0,3179	— 0,5290	+ 0,3418	+ 0,0197	+ 0,0880
40	+ 0,029	0,728	+ 0,2619	+ 0,5517	— 0,1127	+ 0,0094	+ 0,0110
41	+ 0,168	0,238	— 0,3130	— 0,5236	— 0,4530	+ 0,0142	+ 0,0698
42	+ 0,284	1,083	+ 0,0239	— 0,2847	+ 0,1240	+ 0,0004	— 0,0002
43	— 0,001	1,166	+ 0,0240	+ 0,1035	— 0,3173	+ 0,0003	+ 0,0007
44	— 0,150	0,789	— 0,2430	— 0,4295	— 0,3190	— 0,0102	+ 0,0045
45	+ 0,131	0,877	+ 0,2173	— 0,2629	+ 0,4263	— 0,0017	+ 0,0128
46	— 0,290	1,099	+ 0,1089	+ 0,1776	— 0,3358	+ 0,0005	+ 0,0042
47	— 0,476	0,988	— 0,1724	— 0,0551	— 0,2412	— 0,0052	— 0,0004
48	— 0,524	1,156	— 0,0166	— 0,0507	+ 0,3258	+ 0,0009	— 0,0006
49	— 0,075	0,933	+ 0,1882	+ 0,2301	— 0,3980	— 0,0012	+ 0,0097
50	+ 0,483	1,106	+ 0,0704	— 0,1276	+ 0,3195	+ 0,0004	+ 0,0024
51	— 0,186	1,052	+ 0,1066	— 0,1581	+ 0,3312	+ 0,0001	+ 0,0040
52	+ 0,399	1,110	+ 0,0026	+ 0,0590	— 0,3090	— 0,0002	— 0,0001
53	— 0,516	0,874	+ 0,1712	— 0,2023	+ 0,3754	— 0,0014	+ 0,0082
54	— 0,430	0,779	+ 0,2035	— 0,2142	+ 0,4107	— 0,0030	+ 0,0113

Satellit III. Positionswinkel.

	n′		*b′*	*c′*	*d′*	*e′*	*f′*
33	+ 0″,331		+ 0,0176	— 0,0226	— 0,0273	— 0,3356	+ 0,0353
34	+ 0,225		+ 0,0067	+ 0,0037	+ 0,0127	— 0,3012	+ 0,1582
35	+ 0,337		+ 0,0278	— 0,0528	— 0,0175	— 0,3218	— 0,1595
36	+ 0,183		+ 0,0167	+ 0,0064	+ 0,0329	— 0,2863	+ 0,1947
37	— 0,089		+ 0,0195	+ 0,0353	+ 0,0167	— 0,3210	— 0,1139
38	+ 0,469		+ 0,0164	— 0,0245	— 0,0219	— 0,3371	— 0,0179
39	— 0,248		+ 0,0900	+ 0,1428	— 0,1095	+ 0,0412	+ 0,3200
40	+ 0,052		+ 0,0245	+ 0,0483	+ 0,0085	— 0,2741	— 0,1905
41	— 0,365		+ 0,0716	+ 0,1098	+ 0,0918	+ 0,0278	+ 0,3189
42	+ 0,323		+ 0,0134	— 0,0144	— 0,0227	— 0,3003	+ 0,0679
44	+ 0,144		— 0,0228	— 0,0219	— 0,0400	+ 0,3184	— 0,0879
45	— 0,321		— 0,0202	+ 0,0355	— 0,0193	+ 0,0893	+ 0,3175
46	— 0,350		— 0,0160	— 0,0317	+ 0,0039	+ 0,1990	+ 0,2635
47	— 0,470		— 0,0176	— 0,0255	— 0,0244	+ 0,3284	+ 0,0122
48	— 0,535		— 0,0149	+ 0,0289	+ 0,0075	— 0,2160	+ 0,2466
49	+ 0,024		— 0,0177	— 0,0321	+ 0,0149	+ 0,1070	+ 0,3057
50	— 0,319		— 0,0145	+ 0,0290	— 0,0012	+ 0,2140	+ 0,2397
51	— 0,120		— 0,0146	+ 0,0287	— 0,0051	+ 0,1780	+ 0,2620
52	— 0,232		+ 0,0135	+ 0,0266	+ 0,0046	+ 0,2541	+ 0,1848
53	— 0,265		— 0,0155	+ 0,0281	— 0,0132	+ 0,0999	+ 0,2890
54	+ 0,051		— 0,0169	+ 0,0281	— 0,0189	+ 0,0533	+ 0,2950

18.

Satellit IV. Entfernungen.

	n	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
1	— 0,″477	1,138	+ 0,0370	— 0,0722	— 0,5635	— 0,0004	+ 0,0009
2	+ 0,204	1,162	+ 0,0326	+ 0,2297	— 0,5329	+ 0,0079	+ 0,0056
3	+ 0,530	1,225	— 0,0340	+ 0,3261	— 0,5191	— 0,0008	— 0,0003
4	+ 0,342	1,225	— 0,0190	+ 0,3524	— 0,4982	— 0,0015	— 0,0004
5	+ 0,226	1,120	— 0,2509	+ 0,2267	— 0,7158	— 0,0079	+ 0,0024
6	— 0,619	1,006	+ 0,3977	— 0,7498	+ 0,5706	+ 0,0244	+ 0,0210
7	— 0,742	1,231	+ 0,1829	— 0,5286	+ 0,4849	+ 0,0039	+ 0,0053
8	— 0,650	1,283	— 0,0568	— 0,3087	+ 0,5736	— 0,0015	— 0,0006
9	— 0,566	1,162	+ 0,2806	— 0,7868	— 0,1827	— 0,0224	+ 0,0026
10	— 0,246	0,876	+ 0,4730	— 0,5858	— 0,8613	— 0,0420	+ 0,0185
11	+ 0,070	0,905	+ 0,4663	+ 0,7993	— 0,6568	+ 0,0044	+ 0,0310
12	+ 0,421	1,306	+ 0,0427	+ 0,3848	— 0,5292	+ 0,0010	+ 0,0008
13	+ 0,627	1,235	— 0,2142	+ 0,2137	— 0,7186	— 0,0065	+ 0,0004
14	+ 0,381	0,995	— 0,4222	+ 0,2203	— 0,9547	+ 0,0360	— 0,0110
15	— 0,793	0,357	+ 0,6188	— 0,7880	+ 0,9708	— 0,0192	+ 0,1155
16	— 0,656	1,292	+ 0,0938	— 0,4252	+ 0,5225	+ 0,0021	+ 0,0021
17	— 0,388	1,273	— 0,1478	— 0,2423	+ 0,6727	— 0,0041	— 0,0007
18	— 0,243	1,065	— 0,3794	— 0,1863	+ 0,9069	— 0,0135	+ 0,0069
19	+ 0,299	1,257	+ 0,1942	— 0,2403	— 0,5216	+ 0,0034	+ 0,0063
20	— 0,016	1,309	— 0,0254	+ 0,3335	— 0,5613	— 0,0022	— 0,0007
21	+ 0,022	1,176	— 0,2895	+ 0,1657	— 0,8071	— 0,0035	+ 0,0012
22	+ 0,208	0,470	— 0,6046	+ 0,4161	— 1,1596	+ 0,0690	— 0,0633
23	+ 0,308	0,084	+ 0,4164	— 0,4040	+ 0,7296	— 0,1620	+ 0,4756
24	— 0,323	1,298	+ 0,0110	— 0,3245	+ 0,5606	+ 0,0002	+ 0,0002
25	— 0,472	1,298	— 0,0022	— 0,3127	+ 0,5696	— 0,0001	0,0000
26	+ 0,276	1,133	+ 0,3138	+ 0,6159	— 0,5740	+ 0,0036	+ 0,0136
27	+ 0,055	1,267	— 0,1224	+ 0,2054	— 0,6440	— 0,0030	— 0,0011
28	+ 0,379	0,260	— 0,6097	+ 0,4641	— 1,1351	— 0,0666	+ 0,1226
29	— 0,395	0,884	+ 0,4419	+ 0,6659	— 0,7586	+ 0,0003	+ 0,0275
30	+ 0,073	0,929	+ 0,4183	+ 0,6791	— 0,6713	+ 0,0101	+ 0,0242
31	+ 0,055	1,207	+ 0,0585	— 0,3202	+ 0,5261	+ 0,0010	+ 0,0013
32	+ 0,113	0,456	— 0,5186	— 0,2688	+ 1,0270	— 0,0297	+ 0,0389
33	— 0,275	0,949	+ 0,1793	+ 0,4203	— 0,5154	+ 0,0018	+ 0,0054
34	— 0,024	0,727	— 0,3435	+ 0,1436	— 0,7637	— 0,0100	+ 0,0078
35	+ 0,197	0,946	— 0,1245	— 0,1598	+ 0,5100	— 0,0022	— 0,0013
36	— 0,298	0,173	+ 0,4620	+ 0,5409	— 0,7543	— 0,0280	+ 0,1114
37	— 0,157	0,659	+ 0,3596	— 0,6263	+ 0,4840	— 0,0178	+ 0,0179
38	— 1,334	1,131	+ 0,1451	— 0,6319	— 0,0616	+ 0,0039	— 0,0010
39	+ 0,235	0,492	+ 0,5349	+ 1,0887	— 0,1361	+ 0,0336	+ 0,0444
40	+ 0,703	1,122	— 0,2116	+ 0,5761	— 0,4029	— 0,0032	+ 0,0075

41	+ 0″,898	0,545	− 0,5352	+ 0,9447	− 0,5728	+ 0,0075	+ 0,0578
42	− 0,610	1,264	− 0,0299	+ 0,3706	+ 0,5129	+ 0,0006	0,0000
43	− 0,069	0,467	+ 0,5575	+ 1,0889	− 0,3411	− 0,0355	− 0,0312
44	+ 0,190	0,566	− 0,5275	+ 0,8270	− 0,7141	− 0,0013	+ 0,0500
45	− 0,178	0,997	+ 0,3217	− 0,8050	+ 0,1230	+ 0,0081	+ 0,0058
46	+ 0,189	1,166	− 0,1023	− 0,3749	+ 0,3748	− 0,0019	+ 0,0018
47	− 0,380	1,090	+ 0,1969	+ 0,6547	− 0,1428	+ 0,0046	+ 0,0013
48	+ 0,064	1,124	+ 0,0093	− 0,4983	+ 0,2579	+ 0,0002	− 0,0008
49	− 0,568	1,064	+ 0,1338	+ 0,5717	− 0,1584	+ 0,0028	+ 0,0002
50	− 0,698	0,920	− 0,2870	+ 0,4996	− 0,5405	− 0,0036	+ 0,0102
51	− 0,071	0,651	− 0,4314	+ 0,6614	− 0,6432	− 0,0025	+ 0,0280
52	+ 0,085	0,896	+ 0,3784	+ 0,4780	− 0,7355	− 0,0038	+ 0,0214
53	− 0,182	1,110	+ 0,1931	+ 0,3312	− 0,5847	+ 0,0005	+ 0,0074
54	− 0,408	1,158	+ 0,0382	− 0,1651	+ 0,5605	+ 0,0008	+ 0,0014
55	− 0,358	0,576	− 0,5040	+ 0,0230	+ 1,0478	− 0,0284	+ 0,0174
56	+ 0,693	0,312	+ 0,5527	+ 0,3698	− 1,0509	− 0,0467	+ 0,0821
57	− 0,196	1,143	+ 0,1158	+ 0,2330	− 0,5657	+ 0,0005	+ 0,0037
58	− 0,654	1,025	− 0,2497	+ 0,0946	+ 0,7096	− 0,0053	− 0,0026
59	− 0,178	0,395	− 0,5307	− 0,0245	+ 1,0793	− 0,0423	+ 0,0329
60	+ 0,204	0,444	+ 0,5201	+ 0,3812	− 0,9926	− 0,0283	+ 0,0534
61	+ 0,149	1,052	+ 0,2419	+ 0,3338	− 0,6198	− 0,0011	+ 0,0100
62	+ 0,218	0,875	− 0,3508	− 0,1350	− 0,8148	− 0,0100	− 0,0002
63	− 0,751	1,084	+ 0,0990	− 0,1893	+ 0,5571	+ 0,0002	+ 0,0031
64	− 0,097	0,980	− 0,2312	− 0,2081	− 0,6629	− 0,0041	− 0,0026
65	− 0,834	1,054	+ 0,0236	− 0,1041	+ 0,5204	+ 0,0004	+ 0,0009
66	+ 0,497	1,027	+ 0,0962	+ 0,1750	− 0,5151	+ 0,0012	+ 0,0029

Satellit IV. Positionswinkel.

	a'	b'	c'	d'	e'	f'
38	− 0″,010	+ 0,0295	− 0,0319	− 0,0496	− 0,5775	+ 0,0783
39	− 0,377	+ 0,0704	+ 0,1401	+ 0,0140	− 0,4260	− 0,4068
40	+ 0,780	+ 0,0315	− 0,0023	+ 0,0630	− 0,4406	+ 0,4037
41	+ 0,161	+ 0,0655	− 0,0917	+ 0,0936	− 0,0542	+ 0,5940
42	+ 0,312	− 0,0084	+ 0,0145	− 0,0085	− 0,5914	+ 0,2161
43	− 0,272	+ 0,0732	+ 0,1458	− 0,0131	− 0,3547	− 0,4970
44	+ 0,585	+ 0,0578	− 0,0649	+ 0,0958	− 0,1626	+ 0,5868
45	− 0,169	+ 0,0319	− 0,0558	− 0,0311	− 0,5549	− 0,2056
46	+ 0,539	+ 0,0269	− 0,0167	− 0,0512	− 0,5457	+ 0,2251
47	− 0,732	+ 0,0273	+ 0,0407	+ 0,0363	− 0,5731	− 0,0781
48	+ 0,150	+ 0,0123	− 0,0120	− 0,0215	− 0,5496	+ 0,1094
49	− 0,201	+ 0,0244	+ 0,0328	+ 0,0361	− 0,5469	− 0,0169
50	+ 0,084	+ 0,0276	− 0,0039	+ 0,0551	− 0,3858	+ 0,3788
51	− 0,203	+ 0,0388	− 0,0328	+ 0,0702	− 0,2231	+ 0,4895

53	— 0″,538		— 0,0271	— 0,0539	+ 0,0052	+ 0,3365	+ 0,4806
54	— 0,023		— 0,0251	+ 0,0496	+ 0,0078	+ 0,4382	+ 0,3750
55	— 0,307		— 0,0506	+ 0,2983	+ 0,0966	+ 0,5337	— 0,2299
56	+ 0,466		— 0,0932	— 0,0855	+ 0,1656	— 0,2156	+ 0,5341
57	— 0,123		— 0,0250	— 0,0501	— 0,0001	+ 0,3779	+ 0,4409
58	— 0,381		— 0,0263	+ 0,0422	+ 0,0314	+ 0,5544	+ 0,1264
59	— 0,918		— 0,0681	+ 0,0217	+ 0,1343	+ 0,4877	— 0,2908
60	+ 0,418		— 0,0602	— 0,0655	+ 0,1011	— 0,1601	+ 0,5442
61	+ 0,493		— 0,0255	— 0,0495	+ 0,0135	+ 0,2422	+ 0,5141
62	— 0,207		— 0,0291	— 0,0384	— 0,0438	+ 0,5607	+ 0,0072
63	— 0,184		— 0,0224	+ 0,0449	— 0,0007	+ 0,3512	+ 0,4229
64	— 0,296		— 0,0233	— 0,0384	— 0,0263	+ 0,5223	+ 0,1409
65	+ 0,185		— 0,2034	— 0,0405	+ 0,0044	+ 0,3830	+ 0,3601
66	— 0,350		— 0,0199	— 0,0398	+ 0,0014	+ 0,5455	+ 0,4517

19.

Der Beitrag, welchen die, diesen Bedingungsgleichungen zum Grunde liegenden Beobachtungen zu jeder, die Werthe der 6 Elemente der Bewegung eines der Satelliten (oder eines oder mehrerer dieser Elemente) betreffenden Untersuchung liefern können, kann, der Methode der kleinsten Quadrate zufolge, immer auch durch die Ausdrücke:

$$\left.\begin{array}{l} (an) + (aa)p + (ab)q + (ac)r + \ldots. \\ (bn) + (ab)p + (bb)q + (bc)r + \ldots. \\ (cn) + (ac)p + (bc)q + (cc)r + \ldots. \\ \quad\quad \text{u. s. w.} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

erlangt werden, welche Ausdrücke also als die Zusammenziehung sämmtlicher Beobachtungen eines Satelliten, in ihre einfachste Gestalt, betrachtet werden können. Ich werde daher die Werthe von (an), (aa), (ab) (bn), (bb),.... u. s. w. so wie sie aus den Bedingungsgleichungen für jeden Satelliten hervorgehen, hier anführen.

Satellit I.

24 Beobachtungen der Entfernung. $(nn) = 1,5912$

$(an) = -0'',3782$	$(aa) = 22,6789$	$(ab) = -0,5302$	$(ac) = +0,2231$	$(ad) = -0,4829$	$(ae) = -0,0373$	$(af) = +0,0806$
$(bn) = -0,0179$		$(bb) = +0,1934$	$(bc) = -0,0072$	$(bd) = +0,0829$	$(be) = +0,0078$	$(bf) = -0,0082$
$(cn) = +0,1093$			$(cc) = +0,2676$	$(cd) = -0,3501$	$(ce) = -0,0007$	$(cf) = -0,0010$
$(dn) = -0,0061$				$(dd) = +0,7606$	$(de) = +0,0047$	$(df) = -0,0065$
$(en) = +0,0012$					$(ee) = +0,0003$	$(ef) = -0,0002$
$(fn) = -0,0020$						$(ff) = +0,0013$

Satellit II.

17 Beobachtungen der Entfernung . $(nn) = 0{,}9606$.

$(an) = -0'',4838$	$(aa) = 13{,}1991$	$(ab) = +0{,}4735$	$(ac) = -0{,}4044$	$(ad) = +0{,}7672$	$(ae) = +0{,}0178$	$(af) = +0{,}1979$
$(bn) = +0{,}0377$		$(bb) = +0{,}4382$	$(bc) = -0{,}1339$	$(bd) = +0{,}1988$	$(be) = +0{,}0072$	$(bf) = +0{,}0173$
$(cn) = -0{,}0426$			$(cc) = +0{,}6944$	$(cd) = -0{,}9103$	$(ce) = -0{,}3883$	$(cf) = -0{,}3453$
$(dn) = -0{,}0742$				$(dd) = +1{,}4618$	$(de) = +0{,}0125$	$(df) = -0{,}0347$
$(en) = -0{,}0064$					$(ee) = +0{,}0008$	$(ef) = -0{,}0017$
$(fn) = -0{,}0064$						$(ff) = +0{,}0167$

Satellit III.

54 Beobachtungen der Entfernung $(nn) = 5{,}6809$
21 — des Positionswinkels 1,8336

75 Beobachtungen $(nn) = 7{,}5145$

$(an) = -3'',2969$	$(aa) = 51{,}9243$	$(ab) = -0{,}0706$	$(ac) = -0{,}3288$	$(ad) = -1{,}2877$	$(ae) = -0{,}0772$	$(af) = +0{,}3478$
$(bn) = +0{,}1769$		$(bb) = +2{,}1522$	$(bc) = +0{,}7572$	$(bd) = -0{,}1725$	$(be) = -0{,}0373$	$(bf) = +0{,}0422$
$(cn) = +0{,}9181$			$(cc) = +4{,}5367$	$(cd) = -3{,}4777$	$(ce) = -0{,}0082$	$(cf) = +0{,}1071$
$(dn) = -1{,}3673$				$(dd) = +8{,}2639$	$(de) = -0{,}0024$	$(df) = -0{,}1115$
$(en) = -0{,}8442$					$(ee) = +1{,}2462$	$(ef) = +0{,}2545$
$(fn) = -0{,}6920$						$(ff) = +1{,}0567$

Satellit IV.

66 Beobachtungen der Entfernung $(nn) = 13{,}1475$
28 — des Positionswinkels 4,6116

94 Beobachtungen $(nn) = 17{,}7591$

$(an) = -7'',5970$	$(aa) = 65{,}2205$	$(ab) = +1{,}1531$	$(ac) = +3{,}8888$	$(ad) = -9{,}2446$	$(ae) = -0{,}1213$	$(af) = +0{,}5254$
$(bn) = -1{,}8979$		$(bb) = +7{,}2456$	$(bc) = -0{,}5798$	$(bd) = -0{,}6668$	$(be) = -0{,}4788$	$(bf) = +0{,}1807$
$(cn) = +5{,}1396$			$(cc) = +15{,}8159$	$(cd) = -12{,}6622$	$(ce) = +0{,}1513$	$(cf) = -0{,}4385$
$(dn) = -8{,}2120$				$(dd) = +29{,}1736$	$(de) = -0{,}1081$	$(df) = +0{,}3614$
$(en) = -1{,}7072$					$(ee) = +5{,}5624$	$(ef) = +0{,}3317$
$(fn) = +1{,}9153$						$(ff) = +4{,}2153$

20.

Die unbekannten Elemente einer gegebenen Theorie werden am vortheilhaftsten bestimmt, wenn die Ausdrücke von der Form (18), gegründet auf *alle* vorhandenen Beobachtungen, als verschwindend vorausgesetzt werden; sind verschiedene, gesonderte Beobachtungsreihen des Gegenstandes der Theorie vorhanden, so müssen also die auf den einzelnen beruhenden, einander ähnlichen Ausdrücke dieser Art, (mit gehöriger Rücksicht auf die Genauigkeit der ihnen zum Grunde liegenden

Beobachtungen) summirt, und die Summe muss der Bedingung des Verschwindens unterworfen werden. Wenn eine neue Beobachtungsreihe zu schon vorhandenen hinzukommt, so *vergrössert* sie die Sicherheit der durch diese schon erlangten Bestimmungen. *Wesentliche* Bedingung des Fortschreitens der astronomischen Bestimmungen von geringerer zu grösserer Sicherheit ist daher, dass ihre Untersuchungen in einer Form durchgeführt werden, welche das Hinzusetzen der auf spätere Beobachtungen gegründeten Ausdrücke von der Form (18) zu den schon vorhandenen, möglich macht.

Diese Art der Durchführung der Untersuchungen ist, seit der Zeit der Erfindung der Methode der kleinsten Quadrate, die eigentliche Aufgabe der practischen Astronomie geworden. Sie hat den Astronomen ein weites Feld zur Bearbeitung eröffnet; ein Feld welches vor dieser Zeit noch nicht bearbeitet werden konnte, dem aber auch während derselben die Bemühungen weit weniger zugewandt worden sind, als die offenbare Grösse des Erfolges erwarten lassen sollte. Jetzt ist die Aufgabe, deren Auflösung die Astronomen ihre Kräfte vorzugsweise widmen sollten, Untersuchungen, welche noch nicht in dieser Art durchgeführt worden sind, so durchzuführen, dass sie die Grundlage *mit der Zeit fortschreitender* Vergrösserungen der Sicherheit ihrer Resultate werden können. In der Folge wird dann das Zurückgehen bis zum Anfange, nur in Fällen nothwendig werden, in welcher die dem Anfange zum Grunde gelegte Theorie als unvollständig erkannt worden ist.

Diese *allgemeine* Bemerkung über die nothwendige Art des Fortschreitens der practischen Astronomie hat hier ihren Platz gefunden, weil die Untersuchung, welche der Gegenstand dieser Abhandlung ist, nur durch ihre Verbindung mit den Resultaten früherer Beobachtungen der Jupiterssatelliten, bis zu ihrem Ziele geführt werden kann, diese Verbindung aber, bei mangelnder gehöriger Form der früheren Untersuchung, noch nicht auf eine Art gemacht werden kann, welche sich völlig rechtfertigen liesse. Wenn man den ersten der, im vorigen §, aus den jetzigen Beobachtungen gefolgerten Ausdrücke, der Bedingung des Verschwindens unterwirft, so bestimmt er die durch diese Beobachtungen gesuchte unbekannte Grösse p, und damit das Element Δ, nicht unabhängig, sondern mehr oder weniger abhängig von den übrigen Elementen der Theorie. Man erhält nämlich dadurch

$$\delta\Delta = +\,0{,}''0167 + 0{,}0234\,q - 0{,}0098\,r + 0{,}0213\,s + 0{,}0016\,t - 0{,}0036\,u$$
$$\delta\Delta' = +\,0{,}0367 - 0{,}0359\,q' + 0{,}0306\,r' - 0{,}0581\,s' - 0{,}0013\,t' - 0{,}0150\,u'$$
$$\delta\Delta'' = +\,0{,}0635 + 0{,}0014\,q'' + 0{,}0063\,r'' + 0{,}0248\,s'' + 0{,}0015\,t'' - 0{,}0067\,u''$$
$$\delta\Delta''' = +\,0{,}1165 - 0{,}0177\,q''' - 0{,}0596\,r''' + 0{,}1417\,s''' + 0{,}0019\,t''' - 0{,}0081\,u'''$$

Die wahren, von q, r, s,.... u. s. w. unabhängig gemachten Resultate dieser Untersuchung würde man erhalten, wenn man zu den aus den Beobachtungen der Finsternisse der Satelliten gefolgerten Ausdrücken von der Art des 2[ten], 3[ten].... der Ausdrücke (18), die auf den gegenwärtigen Beobachtungen beruhenden hinzusetzte, die Summen als verschwindend annähme, daraus die Bestimmung der unbekannten Grössen q, r, s.... ableitete und dieser gemäss ihre Einflüsse auf $\delta\Delta$, $\delta\Delta'$,.... wegschaffte. Allein da dieses, aus dem angeführten Grunde, für jetzt nicht geschehen kann, so bleibt nur die Wahl übrig, zwischen der — auf Vertrauen auf die aus den Finsternissen abgeleitete Theorie der Satelliten zu gründenden — Voraussetzung des Verschwindens von q, r, s...., und der Benutzung der neuen Beobachtungen selbst zur Elimination ihrer Einflüsse.

Wählt man das erstere, so sind die ersten, von q, r, s.... unabhängigen Theile der eben gefundenen Ausdrücke von $\delta\Delta$, $\delta\Delta'$,.... als die Resultate der gegenwärtigen Beobachtungen anzunehmen; die mittleren Fehler

einer Beob. des Sat. I $= \pm\sqrt{\frac{1{,}5849}{23}} = \pm\,0{,}''2625$; von $\Delta = \pm\,0{,}''05512$

II $= \pm\sqrt{\frac{0{,}9429}{16}} = \pm\,0{,}2428$;.... $\Delta' = \pm\,0{,}06682$

III $= \pm\sqrt{\frac{7{,}3051}{74}} = \pm\,0{,}3142$;.... $\Delta'' = \pm\,0{,}04360$

IV $= \pm\sqrt{\frac{16{,}8742}{93}} = \pm\,0{,}4260$;.... $\Delta''' = \pm\,0{,}05275$

Zieht man aber das andere vor, so muss man die Gleichungen auflösen, welche das Verschwinden der Ausdrücke (18) giebt. Offenbar können nur die vier ersten Elemente der Satelliten I und II dadurch bestimmt werden, indem die allein vorhandenen Beobachtungen der Entfernungen dieser Satelliten die Lage ihrer Bahnen, also die beiden letzten Elemente, so gut wie ganz unbestimmt gelassen haben.

Auf diese Art erhält man:

Satellit I.

$p = + 0{,}0244$; Gewicht $= 21{,}0704$; m. F. $= \pm 0{,}0588$
$q = + 0{,}3414 \ldots\ldots = 0{,}1652 \ldots\ldots \pm 0{,}6645$
$r = - 1{,}0997 \ldots\ldots = 0{,}1009 \ldots\ldots \pm 0{,}8502$
$s = - 0{,}5199 \ldots\ldots = 0{,}2746 \ldots\ldots \pm 0{,}5154$

$(nn_4) = 1{,}4588$; m. F. einer Beobb. $= \pm \sqrt{\frac{1{,}4588}{20}} = \pm 0{,}''2701$

und in Secunden ausgedrückt:

$\delta\Delta = + 0{,}''0244$; m. F. $= \pm 0{,}''0588$
$\delta\theta = + 70{,}''4 \ldots\ldots \pm 137{,}''1$
$\delta(e \sin\omega) = - 226{,}''8 \ldots\ldots \pm 175{,}''4$
$\delta(e \cos\omega) = - 107{,}''2 \ldots\ldots \pm 106{,}''3$

Satellit II.

$p' = + 0{,}0347$; Gewicht $= 12{,}4211$; m. F. $= \pm 0{,}0737$
$q' = - 0{,}1306 \ldots\ldots = 0{,}3996 \ldots\ldots \pm 0{,}4106$
$r' = + 0{,}6659 \ldots\ldots = 0{,}1268 \ldots\ldots \pm 0{,}7292$
$s' = + 0{,}4651 \ldots\ldots = 0{,}2636 \ldots\ldots \pm 0{,}5056$

$(n'n'_4) = 0{,}8760$; m. F. einer Beobb. $= \pm \sqrt{\frac{0{,}8760}{13}} = \pm 0{,}''2596$

und in Secunden ausgedrückt:

$\delta\Delta' = + 0{,}''0347$; m. F. $= \pm 0{,}''0737$
$\delta\theta' = - 26{,}''9 \ldots\ldots \pm 84{,}''7$
$\delta(e' \sin\omega') = + 137{,}''4 \ldots\ldots \pm 150{,}''4$
$\delta(e' \cos\omega') = + 95{,}''9 \ldots\ldots \pm 104{,}''3$

Satellit III.

$p'' = + 0{,}0637$; Gewicht $= 51{,}3366$; m. F. $= \pm 0{,}04174$
$q'' = - 0{,}0359 \ldots\ldots = 1{,}9938 \ldots\ldots \pm 0{,}2118$
$r'' = - 0{,}0940 \ldots\ldots = 2{,}8387 \ldots\ldots \pm 0{,}1775$
$s'' = + 0{,}1423 \ldots\ldots = 5{,}4699 \ldots\ldots \pm 0{,}1279$
$t'' = + 0{,}5734 \ldots\ldots = 1{,}1833 \ldots\ldots \pm 0{,}2750$
$u'' = + 0{,}5217 \ldots\ldots = 0{,}9989 \ldots\ldots \pm 0{,}2993$

$(n''n''_6) = 6{,}1719$; m. F. einer Beobb. $= \pm \sqrt{\frac{6{,}1719}{69}} = \pm 0{,}''2991$

und in Secunden ausgedrückt:

$$\delta\Delta'' = +\ 0'',0637;\ \text{m. F.} = \pm\ 0'',04174$$
$$\delta\theta'' = -\ \ 7'',4 \ldots\ldots\ldots \pm\ 43'',7$$
$$\delta(e''\sin\omega'') = -\ 19,4 \ldots\ldots\ldots \pm\ 36,6$$
$$\delta(e''\cos\omega'') = +\ 29,4 \ldots\ldots\ldots \pm\ 26,4$$
$$\sin I''\delta N'' = +\ 118,3 \ldots\ldots\ldots \pm\ 56,7$$
$$\delta I'' = +\ 107,6 \ldots\ldots\ldots \pm\ 61,7$$

Satellit IV.

$$p''' = +\ 0,1657;\ \text{Gewicht} = 62,075;\ \text{m. F.} = \pm\ 0,04520$$
$$q''' = +\ 0,2891 \ldots\ldots = 7,095 \ldots\ldots \pm\ 0,1337$$
$$r''' = -\ 0,1453 \ldots\ldots = 10,199 \ldots\ldots \pm\ 0,1115$$
$$s''' = +\ 0,2858 \ldots\ldots = 18,307 \ldots\ldots \pm\ 0,0832$$
$$t''' = +\ 0,3781 \ldots\ldots = 5,501 \ldots\ldots \pm\ 0,1518$$
$$u''' = +\ 0,5568 \ldots\ldots = 4,171 \ldots\ldots \pm\ 0,1743$$
$$(n'''n'''_6) = 11,1450;\ \text{m. F. einer Beobb.} = \pm\sqrt{\frac{11,1450}{88}} = \pm\ 0'',3561$$

und in Secunden ausgedrückt:

$$\delta\Delta''' = +\ 0'',1657;\ \text{m. F.} = \pm\ 0'',04520$$
$$\delta\theta''' = +\ 59'',6 \ldots\ldots\ldots \pm\ 27'',6$$
$$\delta(e'''\sin\omega''') = -\ 30,0 \ldots\ldots\ldots \pm\ 23,0$$
$$\delta(e'''\cos\omega''') = +\ 59,0 \ldots\ldots\ldots \pm\ 17,2$$
$$\sin I'''\delta N''' = +\ 78,0 \ldots\ldots\ldots \pm\ 31,3$$
$$\delta I''' = -\ 114,9 \ldots\ldots\ldots \pm\ 36,0$$

21.

Im vorigen § habe ich die, den §. 13 angenommenen Werthen von Δ, Δ', Δ'', Δ''' anzubringenden Verbesserungen, in zwei Voraussetzungen bestimmt, nämlich in der Voraussetzung der Richtigkeit der Elemente der Satellitentafeln und in der Voraussetzung der Hinlänglichkeit der Heliometerbeobachtungen zur Berichtigung dieser Elemente. Ich werde das was die Verfolgung dieser Voraussetzungen ergeben hat, hier zusammenstellen:

$\delta\Delta\ \ = +\ 0'',0167;\ \text{m. F.} = \pm\ 0'',05512$	$+\ 0'',0244;\ \text{m. F.} = \pm\ 0'',0588$	
$\delta\Delta' = +\ 0,0367 \ldots\ldots \pm\ 0,06682$	$+\ 0,0347 \ldots\ldots \pm\ 0,0737$	
$\delta\Delta'' = +\ 0,0635 \ldots\ldots \pm\ 0,04360$	$+\ 0,0637 \ldots\ldots \pm\ 0,04174$	
$\delta\Delta''' = +\ 0,1165 \ldots\ldots \pm\ 0,05275$	$+\ 0,1657 \ldots\ldots \pm\ 0,04520$	

Der Erfolg beider Voraussetzungen ist also nicht erheblich verschieden ausgefallen, wie die Kleinheit der Einflüsse der Elemente der Bewegung der Satelliten auf die durch die Beobachtungen zu bestimmenden Grössen, auch erwarten liess; die Unterschiede sind nur

Sat. I	+ 0",0077
II	− 0,0020
III	+ 0,0002
IV	+ 0,0492

So wenig erheblich sie sind, so glaube ich doch, die Gründe nicht verschweigen zu dürfen, welche mich veranlasst haben, im Falle der beiden ersten Satelliten der ersten Voraussetzung, und im Falle der beiden letzten der zweiten den Vorzug einzuräumen.

Die Heliometerbeobachtungen machen die Nothwendigkeit einer Verbesserung der vorhandenen Theorien der Satelliten I und II nicht dringend wahrscheinlich, indem die aus ihnen hervorgehenden Änderungen der drei untersuchten Elemente dieser Satelliten meistens kleiner, und nie beträchtlich grösser sind, als die übrigbleibenden mittleren Fehler ihrer Bestimmungen. Auch scheinen die von diesen Theorien angegebenen Zeiten der Finsternisse so gut mit den Beobachtungen übereinzustimmen, dass Änderungen ihrer Elemente von der Grösse der durch die Heliometerbeobachtungen, mit geringer Wahrscheinlichkeit angegebenen, wohl nicht mit ihnen vereinbar sein würden. In dieser Beziehung erinnere ich, dass Änderungen der Länge der Satelliten I und II von resp. 8",475 und 4",22, die Zeiten ihrer Finsternisse um eine Secunde änderen. Ich halte daher nicht für angemessen, an die Elemente dieser Satelliten die Änderungen anzubringen, welche ihre neueren Beobachtungen allein in die beste Übereinstimmung bringen würden. Übrigens wird die Übereinstimmung durch die Änderung der Elemente auch nur unerheblich vermehrt, indem diese die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Unterschiede nicht stärker als von resp. 1,5849 und 0,9429, auf 1,4588 und 0,8760 verkleinert. — Bei dieser Gelegenheit kann ich die Äusserung nicht unterdrücken, dass ich die Sammlung der Beobachtungen der Finsternisse der Jupiterssatelliten und ihre Vergleichung mit den Tafeln, für eine verdienstliche Arbeit halten würde.

Für den Satelliten III haben beide Voraussetzungen, bis auf einen gänzlich unbedeutenden Unterschied, gleichen Erfolg. Die drei Elemente,

welche Einfluss auf seine Länge in der Bahn erhalten, werden durch die Heliometerbeobachtungen so wenig geändert, dass die Beobachtungen der Finsternisse damit wohl vereinbar zu sein scheinen, welche Beobachtungen bekanntlich in weit geringerer Übereinstimmung mit der Rechnung sind, als die der Satelliten I und II; aber wenn auch kein Widerspruch von dieser Seite zu erwarten ist, so ist die Sicherheit der Änderungen, den mittleren Fehlern ihrer Bestimmung zufolge, doch nicht so gross, dass man sie als durch die Beobachtungen gut begründet betrachten dürfte. Dagegen erfahren die beiden, die Lage der Ebene der Bahn bestimmenden Elemente, vergleichungsweise mit den mittleren Fehlern ihrer Bestimmung, so grosse Änderungen, dass man ihnen einiges Gewicht beilegen darf. Die Summe der Quadrate der zwischen der Rechnung und den Beobachtungen übrigbleibenden Unterschiede, wird durch die Änderung der Elemente von 7,3051 auf 6,1719 reducirt. — Wenn der Erfolg beider Voraussetzungen wesentlich verschieden wäre, so würde die Wahl zwischen beiden Verlegenheit verursachen; so wie er ist, habe ich, der zweiten den Vorzug zu geben, weniger Schwierigkeit gehabt.

Für den Satelliten IV halte ich den Vorzug der zweiten Voraussetzung nicht für zweifelhaft. Die von den Heliometerbeobachtungen geforderten Änderungen der Elemente sind beträchtlich grösser als die mittleren Fehler ihrer Bestimmungen, und die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Unterschiede wird dadurch von 16,8742 auf 11,1450 herabgebracht. Auch scheint aus den Beobachtungen der Finsternisse kein Zweifel an der Wirklichkeit der gefundenen Änderungen hergenommen werden zu können, denn sie sind bekanntlich in noch weit geringerer Übereinstimmung mit der Rechnung als die des Satelliten III.

22.

Ich bin nun bis an die Ableitung der *Resultate* der gegenwärtigen Untersuchung gelangt. Zuerst werde ich die *Masse* des ganzen Jupiterssystems aufsuchen, indem ich, den im vorigen § angeführten Gründen gemäss, von folgenden Werthen von Δ, Δ', Δ'', Δ''' ausgehen werde:

$$\Delta = 111{,}''7256 + 0{,}''0167 = 111{,}''7423;\ \text{m. F.} = \pm\ 0{,}''05512$$
$$\Delta' = 177{,}7602 + 0{,}0367 = 177{,}7969 \ldots\ldots\ldots \pm\ 0{,}06682$$
$$\Delta'' = 283{,}5421 + 0{,}0637 = 283{,}6058 \ldots\ldots\ldots \pm\ 0{,}04174$$
$$\Delta''' = 498{,}7006 + 0{,}1657 = 498{,}8663 \ldots\ldots\ldots \pm\ 0{,}04520$$

Wenn die Masse der Sonne, die anziehende Kraft welche sie in der mittleren Entfernung der Erde von ihr äussert und diese Entfernung, als Einheiten der Massen, Kräfte und Entfernungen angenommen werden, so zieht die Masse M des ellipsoidischen Jupiters einen Satelliten in der Entfernung r von seinem Mittelpunkte und der Entfernung rv von der Ebene seines Aequators, mit der Kraft

$$\frac{M}{rr}\left\{1+\frac{BB}{rr}(1-3vv)(\varrho-\tfrac{1}{2}\varphi)\right\}$$

an, in welchem Ausdrucke B den Aequatorealhalbmesser des Planeten, ϱ seine Ellipticität und φ das Verhältniss der Centrifugalkraft zur Schwere unter seinem Aequator bedeuten (Mec. Cél. Liv. VIII). Wenn der angezogene Satellit die Masse Mm besitzt, so äussert er auf den Planeten eine Anziehung, welche sich zu der vorigen verhält, wie $1:m$. Die Kraft, welche auf seine Bewegung um den Mittelpunkt des Planeten wirkt, ist daher:

$$\frac{M(1+m)}{rr}\left\{1+\frac{BB}{rr}(1-3vv)(\varrho-\tfrac{1}{2}\varphi)\right\}$$

Ausser ihr wirken noch die störenden Kräfte der Sonne und der übrigen Satelliten auf diese Bewegung, und aus allen zusammen entsteht die Bewegung, deren Ausdruck ich §. 8—11 angeführt und zur Construction der Tafeln benutzt habe. Dieser Ausdruck enthält die Wirkung der störenden Kräfte vollständig, so wie auch die Wirkung der von den Ortsveränderungen des Satelliten erzeugten Veränderungen des zwischen Klammern eingeschlossenen Factors der letzten Formel. Der noch übrige beständige Theil dieses Factors, und damit die Kraft:

$$\frac{M(1+m)}{rr}\left\{1+\frac{BB}{aa}(\varrho-\tfrac{1}{2}\varphi)\right\}$$

hat die den *Kepler*schen Gesetzen entsprechende Bewegung des Satelliten, in einer Bahn zur Folge, deren halbe grosse Axe $a=(\varrho)\sin\varDelta$ ist.

Wenn t und T die syderischen Umlaufszeiten des Satelliten und der Erde, M' die Masse der letzteren, bedeuten, hat man, diesen Gesetzen zufolge, bekanntlich

$$\frac{t^2.\,M(1+m)\left\{1+\frac{BB}{aa}(\varrho-\tfrac{1}{2}\varphi)\right\}}{(\varrho)^3\sin\varDelta^3}=T^2(1+M')$$

also

$$M(1+m) = (\varrho)^3\, T^2(1+M')\,.\frac{\sin\Delta^3}{t^2\left\{1+\frac{BB}{aa}(\varrho-\frac{1}{2}\varphi)\right\}}$$

und damit die Masse des ganzen Jupiterssystems $= M(1+m+m'+m''+m''')$ $= M(1+(m))$, welche schon in der Einleitung dieser Abhandlung durch $\frac{1}{\mu}$ bezeichnet worden ist. Man findet also

$$\mu = \frac{1}{(\varrho)^3\, T^2(1+M')}\cdot\frac{1+m}{1+(m)}\cdot\frac{t^2\left\{1+\frac{BB}{aa}(\varrho-\frac{1}{2}\varphi)\right\}}{\sin\Delta^3}$$

Ich werde die Werthe der in dieser Formel vorkommenden Grössen, welche ich bei ihrer Anwendung vorausgesetzt habe, angeben:

1) $(\varrho) = 5{,}20273$, die Entfernung, auf welche die Messungen reducirt worden sind (§. 13).

2) $T = 365{,}256374417$ nach meinen Untersuchungen *Astron. Nachrichten* Nr. 133. S. 266.

3) $M' = 0{,}0000028174$.

4) $\frac{1+m}{1+(m)}$ nach *Damoiseau* (§. 8), für

Sat. I $= 1 - 0{,}0001541127$
- II $= 1 - 0{,}0001477638$
- III $= 1 - 0{,}0000825650$
- IV $= 1 - 0{,}0001285190$

5) t. Die täglichen tropischen Bewegungen der Satelliten, in Hunderttheilen des Quadranten ausgedrückt, sind §. 11 angegeben; die syderischen sind 0,0000424 kleiner, also

Sat. I $n = 226{,}0988391$; $t = \frac{400}{n}$
II $n' = 112{,}8385821$; $t' = \frac{400}{n'}$
III $n'' = 55{,}9084536$; $t'' = \frac{400}{n''}$
IV $n''' = 23{,}9678570$; $t''' = \frac{400}{n'''}$

6) $1+\frac{BB}{aa}(\varrho-\frac{1}{2}\varphi)$. Die Mec. Cél. IV. P. 125 giebt den Werth von $\varrho-\frac{1}{2}\varphi = 0{,}0219013$. Herr *Damoiseau* giebt $\varrho = \frac{1}{13{,}492} = 0{,}074118$, woraus, verbunden mit $\varphi = 0{,}098799$ (Mec. Cél. IV. P. 125), $\varrho-\frac{1}{2}\varphi = 0{,}0247185$ folgt. Die erste Angabe setzt die Werthe der in Halbmessern des Jupiter ausgedrückten Entfernungen der

Satelliten $\left(=\frac{a}{B}\right)$ so voraus, wie ich sie §. 9 angeführt habe; dass Herr *Damoiseau* daran etwas geändert habe, ist nicht wahrscheinlich. Ich habe $\varrho-\frac{1}{2}\varphi=0{,}0247185$ und diese Werthe von $\frac{a}{B}$ angenommen, und damit die Werthe von

$$1+\frac{BB}{aa}(\varrho-\tfrac{1}{2}\varphi)$$

für

$$\begin{aligned}\text{Sat. I} &= 1{,}000761206\\ \text{II} &= 1{,}000300703\\ \text{III} &= 1{,}000118188\\ \text{IV} &= 1{,}000038206\end{aligned}$$

Unter diesen Voraussetzungen berechnet, ergeben die aus meinen Beobachtungen abgeleiteten Werthe von $\varDelta, \varDelta', \varDelta'', \varDelta'''$ den Werth von μ:

Sat. I	1048,381; m. F. =	± 1,5514
II	1048,153	± 1,1817
III	1048,143	± 0,4628
IV	1047,746	± 0,2848

und aus allen vier erhält man endlich:

$$\mu = 1047{,}879;\ \text{m. F.} = \pm\, 0{,}235$$

Um aus jedem der vier Satelliten *diesen* Werth von μ zu erhalten, darf man das ihm zugehörige $\varDelta$ nur um:

$$+0{,}''0178,\quad +0{,}''0154,\quad +0{,}''0238,\quad -0{,}''0211$$

ändern, welche Änderungen sämmtlich beträchtlich kleiner sind als die mittleren Fehler der Bestimmungen der Entfernungen der Satelliten.

23.

Ein zweites Resultat von hinreichendem Gewichte um ihm einige Aufmerksamkeit zu erwerben, ist die aus den Beobachtungen hervorgehende Bestimmung der drei Elemente, von welchen der Ort des Satelliten IV in seiner elliptischen Bahn abhängt. Ich habe §. 20 gefunden

$$\begin{aligned}\delta\theta''' &= +\,59{,}''6;\ \text{m. F.} = \pm\, 27{,}''6\\ \delta(e'''\sin\omega''') &= -\,30{,}0\ \ldots\ldots \pm\, 23{,}0\\ \delta(e'''\cos\omega''') &= +\,59{,}0\ \ldots\ldots \pm\, 17{,}2\end{aligned}$$

und werde jetzt die dieser Bestimmung entsprechenden Werthe von θ''', ω''' und e''', für den, etwa in die Mitte der Zeiten der Beobachtungen fallenden Anfang von 1836 aufsuchen.

Die im 11ten § enthaltenen Formeln für die mittleren Bewegungen ergeben für den Anfang von 1836:

$$\theta''' = 9^\circ\ 31'\ 49'',8$$
$$\omega''' = 241\ 37\ 58,7$$

und aus dem grössten Gliede der Mittelpunktsgleichung des Satelliten $= 2988'',09$ (§. 8) folgt die Excentricität $e''' = 0,00724338$. Man findet hieraus, in Secunden ausgedrückt:

$$e''' \sin \omega''' = -1314'',65; \qquad e''' \cos \omega''' = -709'',85$$

also die meinen Beobachtungen entsprechenden Werthe derselben Grössen

$$-1344'',65 \quad \text{und} \quad -650'',85$$

woraus

$$\omega''' = 244^\circ\ 10'\ 18'',8; \quad e''' = 0,00724254$$

hervorgehen. Diesen Beobachtungen zufolge wäre also für 1836:

$$\theta''' = 9^\circ\ 32'\ 49'',4$$
$$\omega''' = 244\ 10\ 18,8$$
$$e''' = 0,00724254$$

Das letzte Resultat, welches aus meinen Beobachtungen gezogen werden kann, ist die Bestimmung der Lage der Ebenen der Bahnen der Satelliten III und IV. Im 20ten § ist dafür gefunden:

$$\sin I''\delta N'' = +118'',3; \text{ m. F.} = \pm 56'',7$$
$$\delta I'' = +107,6 \ldots\ldots \pm 61,7$$
$$\sin I'''\delta N''' = +78,0 \ldots\ldots \pm 31,3$$
$$\delta I''' = -114,9 \ldots\ldots \pm 36,0$$

Die Tafeln des Satelliten III ergeben für den Anfang von 1836:

$$I'' \cos N'' = +1^\circ\ 59'\ 1'',17; \quad I'' \sin N'' = -1^\circ\ 58'\ 52'',91$$

woraus

$$N'' = 315^\circ\ 1'\ 59'',4, \quad I'' = 2^\circ\ 48'\ 13'',3$$

hervorgehen. Eben so ergeben die Tafeln des Satelliten IV:

$$I''' \cos N''' = +2^\circ\ 4'\ 7'',74; \quad I''' \sin N''' = -1^\circ\ 46'\ 17'',78$$

und damit

$$N''' = 319^\circ\ 25'\ 31'',1, \quad I''' = 2^\circ\ 43'\ 25'',4$$

Setzt man die durch die Heliometerbeobachtungen angedeuteten Unterschiede hinzu, so erhält man, zur Bestimmung der Lage der veränderlichen Ebenen der Bahnen, für den Anfang von 1836:

$$N'' = 315^\circ\ 41'\ 51'',8 \qquad N''' = 319^\circ\ 53'\ 12'',0$$
$$I'' = 2\ 50\ 0,9 \qquad I''' = 2\ 41\ 30,5$$

24.

Ich habe die im vorigen § enthaltenen Resultate nicht unterdrückt, weil ihre mittleren Fehler ihnen einiges Gewicht beilegen; ich halte dieses Gewicht aber nicht für hinreichend zu ihrer befriedigenden Begründung. Indessen kann dadurch anschaulich werden, dass eine Reihe von Heliometerbeobachtungen, welche in der Absicht angestellt wird, dadurch Beiträge zur Bestimmung der Elemente der Bahnen der Jupiterssatelliten zu erlangen, *in Verbindung mit den Beobachtungen der Finsternisse* und der Vorübergänge der Satelliten und ihrer Schatten, zu einer vollständigeren Kenntniss der merkwürdigen Bewegungen im Jupiterssysteme führen kann, als man durch die letzteren allein erlangt hat. Vorzüglich lehrreich würde die erstere in Beziehung auf die Lage der Ebenen der Bahnen werden, worüber die Beobachtungen der Finsternisse viel zu wünschen übrig lassen. Diese führen nämlich zur Kenntniss der Lage der Ebenen nur durch die Verschiedenheit ihrer Dauer in den verschiedenen Stellungen des Jupiter; welche Dauer zugleich von anderen Elementen abhängt, deren Einfluss von dem Einflusse der Lagen der Ebenen nicht auf eine Art getrennt werden kann, welche die Unsicherheit der Bestimmung der letzteren nicht beträchtlich vermehrte. Die Lage der Ebene der Bahn des Satelliten I kennt man z. B. nichtsowohl, als man nur weiss, dass ihre Neigung gegen die Ebene des Jupitersaequators nicht sehr beträchtlich ist; auch scheint die jetzige Kenntniss der Ebenen der Bewegungen der übrigen Satelliten noch nicht Unsicherheiten auszuschliessen, welche so gross oder grösser sind, als die im vorigen § gefundenen Unterschiede für die beiden äussersten derselben. Über die Ebenen der Bahnen der beiden innersten Satelliten geben meine Beobachtungen indessen keine Andeutung, indem sie sich nicht auf die, dazu unentbehrlichen Positionswinkel ausdehnen; allein man muss weder dieses, noch den nicht genügenden Erfolg, welchen meine, in einer anderen Absicht gemachten Beobachtungen, in Beziehung auf einige der Elemente des Jupiterssystems, *gelegentlich* gehabt haben, zum Maasse des Erfolges machen, welchen eine, die Bestimmung dieser Elemente beabsichtigende Beobachtungsreihe haben kann.

Tafeln

für die Bewegungen der Jupiters-Satelliten.

Wenn man den Ort eines Satelliten, für die Zeit t des ersten (Pariser) Meridians verlangt, so erhält man ihn aus den folgenden Tafeln, indem man ihn:

zwischen 1700 und 1800 für $t-r.6^{St.}+1$ Tag
1800 - 1900 $t-r.6^{St.}$

aufsucht, wo r den Rest bedeutet, welchen die Jahreszahl, durch 4 dividirt, übrig lässt. Für die beiden ersten Monate der Schaltjahre ist von der nach dieser Regel veränderten Zeit ein Tag abzuziehen.

Die Tafeln für den Radiusvector jedes Satelliten setzen den mittleren als Einheit voraus und enthalten Einheiten der 5ten Decimale.

Satellit I.

Bewegungen in Julianischen Jahrzehnden.

Jahre	θ	a	b	c	d	e	e'
	° ′ ″						
+ 10	203 32 54	49,3	54,6	57,5	52,2	3,40	5,1
20	47 5 48	98,5	9,1	15,1	4,5	6,79	10,2
30	250 38 42	47,8	63,7	72,6	56,7	10,19	15,3
40	94 11 36	97,1	18,3	30,1	8,9	13,59	20,4
50	297 44 29	46,3	72,8	87,6	61,1	16,99	25,5
60	141 17 23	95,6	27,4	45,2	13,4	20,38	30,6
70	344 50 17	44,9	82,0	2,7	65,6	23,78	35,7
80	188 23 11	94,1	36,5	60,2	17,8	27,18	40,8
90	31 56 5	43,4	91,1	17,8	70,1	30,58	45,9
100	235 28 59	92,7	45,6	75,3	22,3	33,97	51,0

Epochen.

	θ	a	b	c	d	e	e'
	° ′ ″						
1830	359 54 35	54,3	34,0	78,4	98,7	16,36	99,5
1831	164 15 53	99,2	79,5	54,2	73,9	76,70	40,0
1832	328 37 10	44,1	24,9	29,9	49,1	37,04	80,6
1833	132 58 27	89,1	70,4	5,7	24,3	97,38	21,1
1834	297 19 45	34,0	15,9	81,4	99,6	57,72	61,6
1835	101 41 2	78,9	61,3	57,2	74,8	18,06	2,1
1836	266 2 20	23,9	6,8	32,9	50,0	78,40	42,6
1837	70 23 37	68,8	52,2	8,7	25,2	38,74	83,1
1838	234 44 54	13,7	97,7	84,4	0,5	99,08	23,6
1839	39 6 12	58,6	43,1	60,2	75,7	59,42	64,1
1840	203 27 29	3,6	88,6	35,9	50,9	19,75	4,6

Monate.

	θ	a	b	c	d	e	e'
Januar	0 0 0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,00	0,0
Febr.	188 9 32	52,2	52,2	6,4	6,4	79,32	20,0
März	125 51 2	34,8	34,9	12,2	12,2	73,54	10,3
April	314 0 34	87,0	87,2	18,7	18,5	52,86	29,3
May	298 40 45	82,7	82,9	24,9	24,7	3,81	5,7
Juni	126 50 17	34,9	35,2	31,3	31,1	83,12	24,7
Juli	111 30 28	30,6	30,9	37,5	37,3	34,08	1,1
Aug.	299 40 0	82,8	83,1	44,0	43,7	13,39	20,1
Septbr.	127 49 31	35,0	35,4	50,4	50,0	92,71	39,1
Octbr.	112 29 43	30,7	31,1	56,6	56,2	43,66	15,5
Novbr.	300 39 14	82,9	83,4	63,0	62,6	22,98	34,5
Decbr.	285 19 26	78,6	79,1	69,3	68,8	73,93	10,9

Satellit I.

Tage.

	θ	a	b	c	d	e	e′
	° ′ ″						
1	203 29 20	56,5	56,5	0,2	0,2	28,37	42,5
2	46 58 41	13,0	13,0	0,4	0,4	56,73	85,1
3	250 28 1	69,6	69,6	0,6	0,6	85,10	27,7
4	93 57 22	26,1	26,1	0,8	0,8	13,46	70,2
5	297 26 42	82,6	82,6	1,0	1,0	41,83	12,7
6	140 56 2	39,1	39,1	1,2	1,2	70,19	55,3
7	344 25 23	95,7	95,7	1,5	1,4	98,56	97,8
8	187 54 43	52,2	52,2	1,7	1,6	26,92	40,4
9	31 24 3	8,7	8,7	1,9	1,9	55,29	82,9
10	234 53 24	65,2	65,2	2,1	2,1	83,65	25,5
11	78 22 44	21,8	21,8	2,3	2,3	12,02	68,0
12	281 52 5	78,3	78,3	2,5	2,5	40,38	10,6
13	125 21 25	34,8	34,8	2,7	2,7	68,75	53,1
14	328 50 45	91,3	91,3	2,9	2,9	97,11	95,7
15	172 20 6	47,8	47,9	3,1	3,1	25,48	38,2
16	15 49 26	4,4	4,4	3,3	3,3	53,84	80,8
17	219 18 46	60,9	60,9	3,5	3,5	82,21	23,3
18	62 48 7	17,4	17,4	3,7	3,7	10,57	65,9
19	266 17 27	73,9	74,0	3,9	3,9	38,94	8,4
20	109 46 48	30,5	30,5	4,1	4,1	67,30	51,0
21	313 16 8	87,0	87,0	4,4	4,3	95,67	93,5
22	156 45 28	43,5	43,5	4,6	4,5	24,03	36,0
23	0 14 49	0,0	0,1	4,8	4,7	52,40	78,6
24	203 44 9	56,5	56,6	5,0	4,9	80,76	21,1
25	47 13 19	13,1	13,1	5,2	5,1	9,13	63,7
26	250 42 50	69,6	69,6	5,4	5,4	37,49	6,2
27	94 12 10	26,1	26,2	5,6	5,6	65,86	48,8
28	297 41 31	82,6	82,7	5,8	5,8	94,22	91,3
29	141 10 51	39,2	39,2	6,0	6,0	22,59	33,9
30	344 40 11	95,7	95,7	6,2	6,2	50,95	76,4
31	188 9 32	52,2	52,2	6,4	6,4	79,32	19,0

Stunden.

	θ	a	b	c	d	e	e′
	° ′ ″						
1	8 28 43	2,4	2,4	0,0	0,0	1,18	1,8
2	16 57 27	4,7	4,7	0,0	0,0	2,36	3,5
3	25 26 10	7,1	7,1	0,0	0,0	3,55	5,3
4	33 54 53	9,4	9,4	0,0	0,0	4,73	7,1
5	42 23 37	11,8	11,8	0,0	0,0	5,91	8,9
6	50 52 20	14,1	14,1	0,1	0,1	7,09	10,6
7	59 21 3	16,5	16,5	0,1	0,1	8,27	12,4
8	67 49 47	18,8	18,8	0,1	0,1	9,46	14,2
9	76 18 30	21,2	21,2	0,1	0,1	10,64	16,0
10	84 47 13	23,6	23,6	0,1	0,1	11,82	17,7
11	93 15 57	25,9	25,9	0,1	0,1	13,00	19,5
12	101 44 40	28,3	28,3	0,1	0,1	14,18	21,3

Satellit I.

Stunden.

	θ	a	b	c	d	e	e'
	° ′ ″						
13	110 13 24	30,6	30,6	0,1	0,1	15,36	23,0
14	118 42 7	33,0	33,0	0,1	0,1	16,55	24,8
15	127 10 50	35,3	35,3	0,1	0,1	17,73	26,6
16	135 39 34	37,7	37,7	0,1	0,1	18,91	28,4
17	144 8 17	40,0	40,0	0,1	0,1	20,09	30,1
18	152 37 0	42,4	42,4	0,2	0,2	21,27	31,9
19	161 5 44	44,7	44,7	0,2	0,2	22,46	33,7
20	169 34 27	47,1	47,1	0,2	0,2	23,64	35,5
21	178 3 10	49,5	49,5	0,2	0,2	24,82	37,2
22	186 31 54	51,8	51,8	0,2	0,2	26,00	39,0
23	195 0 37	54,2	54,2	0,2	0,2	27,18	40,8
24	203 29 20	56,5	56,5	0,2	0,2	28,37	42,5

Bei dem Ausschreiben der Werthe von *a*, *b*, ... für die Stunden, werden auch die Minuten &c. berücksichtigt.

Minuten.

1	0° 8′ 29″	31	4°22′ 50″
2	0 16 57	32	4 31 19
3	0 25 26	33	4 39 48
4	0 33 55	34	4 48 17
5	0 42 24	35	4 56 45
6	0 50 52	36	5 5 14
7	0 59 21	37	5 13 43
8	1 7 50	38	5 22 11
9	1 16 19	39	5 30 40
10	1 24 47	40	5 39 9
11	1 33 16	41	5 47 38
12	1 41 45	42	5 56 6
13	1 50 13	43	6 4 35
14	1 58 42	44	6 13 4
15	2 7 11	45	6 21 33
16	2 15 40	46	6 30 1
17	2 24 8	47	6 38 30
18	2 32 37	48	6 46 59
19	2 41 6	49	6 55 27
20	2 49 34	50	7 3 56
21	2 58 3	51	7 12 25
22	3 6 32	52	7 20 54
23	3 15 1	53	7 29 22
24	3 23 29	54	7 37 51
25	3 31 58	55	7 46 20
26	3 40 27	56	7 54 48
27	3 48 56	57	8 3 17
28	3 57 24	58	8 11 46
29	4 5 53	59	8 20 15
30	4 14 22	60	8 28 43

Satellit I.

Länge in der Bahn.

	a	b	c	d	e		e'	
0	0″	0″	0″	0″	0′ 0″	206	0″	100
1	+ 1	0	— 3	— 2	+ 3 26	202	0	99
2	+ 2	+ 1	— 7	— 3	+ 6 48	196	+ 1	98
3	+ 2	+ 1	—10	— 4	+10 4	186	+ 1	97
4	+ 3	+ 2	—14	— 6	+13 10	173	+ 1	96
5	+ 4	+ 2	—17	— 7	+16 3	159	+ 2	95
6	+ 5	+ 2	—20	— 9	+18 41	140	+ 2	94
7	+ 6	+ 3	—23	—10	+21 1	120	+ 2	93
8	+ 6	+ 3	—26	—12	+23 1	98	+ 2	92
9	+ 7	+ 3	—29	—13	+24 39	74	+ 2	91
10	+ 8	+ 4	—32	—14	+25 53	50	+ 2	90
11	+ 8	+ 4	—35	—15	+26 43	24	+ 2	89
12	+ 9	+ 4	—37	—16	+27 7	2	+ 1	88
13	+10	+ 5	—40	—17	+27 5	27	+ 1	87
14	+10	+ 5	—42	—18	+26 38	53	+ 1	86
15	+11	+ 5	—44	—19	+25 45	77	0	85
16	+11	+ 5	—46	—20	+24 28	101	0	84
17	+12	+ 5	—48	—21	+22 47	122	— 1	83
18	+12	+ 6	—49	—22	+20 45	142	— 2	82
19	+12	+ 6	—51	—22	+18 23	159	— 3	81
20	+13	+ 6	—52	—23	+15 44	174	— 3	80
21	+13	+ 6	—53	—23	+12 50	187	— 4	79
22	+13	+ 6	—54	—23	+ 9 43	195	— 5	78
23	+13	+ 6	—54	—24	+ 6 28	202	— 6	77
24	+13	+ 6	—54	—24	+ 3 6	205	— 6	76
25	+13	+ 6	—55	—24	— 0 19	205	— 7	75
26	+13	+ 6	—54	—24	— 3 44	201	— 8	74
27	+13	+ 6	—54	—24	— 7 5.	194	— 8	73
28	+13	+ 6	—54	—23	—10 19	185	— 9	72
29	+13	+ 6	—53	—23	—13 24	173	— 9	71
30	+13	+ 6	—52	—23	—16 17	157	—10	70
31	+12	+ 6	—51	—22	—18 54	140	—10	69
32	+12	+ 6	—49	—22	—21 14	119	—10	68
33	+12	+ 5	—48	—21	—23 13	98	—10	67
34	+11	+ 5	—46	—20	—24 51	74	—10	66
35	+11	+ 5	—44	—19	—26 5	46	—10	65
36	+10	+ 5	—42	—18	—26 51	29	—10	64
37	+10	+ 5	—40	—17	—27 20	2	—10	63
38	+ 9	+ 4	—37	—16	—27 18	26	—10	62
39	+ 8	+ 4	—35	—15	—26 52	52	— 9	61
40	+ 8	+ 4	—32	—14	—26 0	77	— 9	60
41	+ 7	+ 3	—29	—13	—24 43	100	— 8	59
42	+ 6	+ 3	—26	—12	—23 3	121	— 7	58
43	+ 6	+ 3	—23	—10	—21 2	141	— 7	57
44	+ 5	+ 2	—20	— 9	—18 41	159	— 6	56
45	+ 4	+ 2	—17	— 7	—16 2	173	— 5	55
46	+ 3	+ 2	—14	— 6	—13 9	187	— 4	54
47	+ 2	+ 1	—10	— 4	—10 2	195	— 3	53
48	+ 2	+ 1	— 7	— 3	— 6 47	202	— 2	52
49	+ 1	0	— 3	— 2	— 3 25	205	— 1	51
50	0	0	0	0	0 0		0	50

Wenn das Argument sich in der letzten Spalte findet, wird das entgegengesetzte Zeichen genommen.

Satellit I.

Radiusvector.

	a	b	e		e'	
0	— 3	— 1	— 398	3	— 1	100
1	— 3	— 1	— 395	9	— 1	99
2	— 3	— 1	— 386	16	— 1	98
3	— 3	— 1	— 370	22	— 1	97
4	— 3	— 1	— 348	27	0	96
5	— 3	— 1	— 321	32	0	95
6	— 3	— 1	— 289	37	0	94
7	— 3	— 1	— 252	41	0	93
8	— 3	— 1	— 211	44	0	92
9	— 3	— 1	— 167	47	0	91
10	— 3	— 1	— 120	48	+ 1	90
11	— 2	— 1	— 72	50	+ 1	89
12	— 2	— 1	— 22	50	+ 1	88
13	— 2	— 1	+ 28	50	+ 1	87
14	— 2	— 1	+ 78	48	+ 1	86
15	— 2	— 1	+ 126	47	+ 1	85
16	— 2	— 1	+ 173	43	+ 2	84
17	— 2	— 1	+ 216	40	+ 2	83
18	— 1	— 1	+ 256	36	+ 2	82
19	— 1	— 1	+ 292	32	+ 2	81
20	— 1	0	+ 324	26	+ 2	80
21	— 1	0	+ 350	21	+ 2	79
22	— 1	0	+ 371	15	+ 2	78
23	0	0	+ 386	9	+ 2	77
24	0	0	+ 395	3	+ 2	76
25	0	0	+ 398	4	+ 2	75
26	0	0	+ 394	10	+ 2	74
27	0	0	+ 384	15	+ 1	73
28	+ 1	0	+ 369	21	+ 1	72
29	+ 1	0	+ 347	27	+ 1	71
30	+ 1	0	+ 320	32	+ 1	70
31	+ 1	+ 1	+ 288	36	+ 1	69
32	+ 1	+ 1	+ 252	41	0	68
33	+ 2	+ 1	+ 211	44	0	67
34	+ 2	+ 1	+ 167	46	0	66
35	+ 2	+ 1	+ 121	49	0	65
36	+ 2	+ 1	+ 72	49	— 1	64
37	+ 2	+ 1	+ 23	50	— 1	63
38	+ 2	+ 1	— 27	50	— 1	62
39	+ 2	+ 1	— 77	48	— 1	61
40	+ 3	+ 1	— 125	46	— 2	60
41	+ 3	+ 1	— 171	44	— 2	59
42	+ 3	+ 1	— 215	40	— 2	58
43	+ 3	+ 1	— 255	36	— 2	57
44	+ 3	+ 1	— 291	32	— 2	56
45	+ 3	+ 1	— 323	26	— 2	55
46	+ 3	+ 1	— 349	22	— 2	54
47	+ 3	+ 1	— 371	15	— 3	53
48	+ 3	+ 1	— 386	9	— 3	52
49	+ 3	+ 1	— 395	3	— 3	51
50	+ 3	+ 1	— 398		— 3	50

Satellit II.

Bewegungen in Julianischen Jahrzehnden.

Jahre	θ′	a′	b′	c	d	e″	f
+10	191° 19′ 6″	45,9	51,2	57,5	52,2	1,70	84,3
20	22 38 13	91,7	2,3	15,1	4,5	3,40	68,6
30	313 57 19	37,6	53,5	72,6	56,7	5,10	52,9
40	45 16 26	83,5	4,7	30,1	8,9	6,79	37,2
50	236 35 32	29,3	55,8	87,6	61,1	8,49	21,5
60	67 54 39	75,2	7,0	45,2	13,4	10,19	5,8
70	259 13 45	21,1	58,2	2,7	65,6	11,89	90,1
80	90 32 52	67,0	9,3	60,2	17,8	13,59	74,4
90	281 51 58	12,8	60,5	17,8	70,1	15,29	58,7
100	113 11 5	58,7	11,7	75,3	22,3	16,99	43,0

Epochen.

1830	301 1 21	37,9	17,7	78,4	98,7	83,18	72,5
1831	248 9 16	22,5	2,8	54,2	73,9	63,35	81,0
1832	195 17 10	7,1	87,9	29,9	49,1	43,52	89,4
1833	142 25 5	91,7	73,0	5,7	24,3	23,69	97,8
1834	89 33 0	76,3	58,1	81,4	99,6	3,86	6,3
1835	36 40 54	60,9	43,3	57,2	74,8	84,03	14,7
1836	343 48 49	45,5	28,4	32,9	50,0	64,20	23,1
1837	290 56 44	30,0	13,5	8,7	25,2	44,37	31,5
1838	238 4 38	14,6	98,6	84,4	0,5	24,54	40,0
1839	185 12 33	99,2	83,7	60,2	75,7	4,71	48,4
1840	132 20 28	83,8	68,9	35,9	50,9	84,88	56,8

Monate.

Januar	0 0 0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,00	0,0
Febr.	262 37 3	72,9	72,9	6,4	6,4	39,66	0,7
März	221 6 39	61,3	61,4	12,2	12,2	36,77	1,4
April	123 43 43	34,2	34,3	18,7	18,5	76,43	2,1
May	284 58 17	78,9	79,1	24,9	24,7	1,90	2,8
Juni	187 35 21	51,8	52,0	31,3	31,1	41,56	3,5
Juli	348 49 55	96,5	96,8	37,5	37,3	67,04	4,2
Aug.	251 26 58	69,4	69,7	44,0	43,7	6,70	4,9
Septr.	154 4 2	42,3	42,7	50,4	50,0	46,36	5,6
Octob.	315 18 36	87,0	87,4	56,6	56,2	71,83	6,3
Novbr.	217 55 40	59,9	60,4	63,0	62,6	11,49	7,0
Decbr.	19 10 14	4,7	5,1	69,3	68,8	36,97	7,7

Satellit II.

Tage.

	θ′	a′	b′	c	d	e″	f
	° ′ ″						
1	101 22 29	28,2	28,2	0,2	0,2	14,18	0,0
2	202 44 58	56,3	56,3	0,4	0,4	28,37	0,0
3	304 7 27	84,5	84,5	0,6	0,6	42,55	0,1
4	45 29 57	12,6	12,6	0,8	0,8	56,73	0,1
5	146 52 26	40,8	40,8	1,0	1,0	70,91	0,1
6	248 14 55	68,9	69,0	1,2	1,2	85,10	0,1
7	349 37 24	97,1	97,1	1,5	1,4	99,28	0,2
8	90 59 53	25,3	25,3	1,7	1,6	13,46	0,2
9	192 22 22	53,4	53,4	1,9	1,9	27,64	0,2
10	293 44 51	81,6	81,6	2,1	2,1	41,83	0,2
11	35 7 21	9,7	9,8	2,3	2,3	56,01	0,3
12	136 29 50	37,9	37,9	2,5	2,5	70,19	0,3
13	237 52 19	66,0	66,1	2,7	2,7	84,37	0,3
14	339 14 48	94,2	94,2	2,9	2,9	98,56	0,3
15	80 37 17	22,4	22,4	3,1	3,1	12,74	0,3
16	181 59 46	50,5	50,5	3,3	3,3	26,92	0,4
17	283 22 15	78,7	78,7	3,5	3,5	41,10	0,4
18	24 44 45	6,8	6,9	3,7	3,7	55,29	0,4
19	126 7 14	35,0	35,0	3,9	3,9	69,47	0,4
20	227 29 43	63,2	63,2	4,1	4,1	83,65	0,5
21	328 52 12	91,3	91,3	4,4	4,3	97,83	0,5
22	70 14 41	19,5	19,5	4,6	4,5	12,02	0,5
23	171 37 10	47,6	47,7	4,8	4,7	26,20	0,5
24	272 59 39	75,8	75,8	5,0	4,9	40,38	0,6
25	14 22 9	3,9	4,0	5,2	5,1	54,56	0,6
26	115 44 38	32,1	32,1	5,4	5,4	68,75	0,6
27	217 7 7	60,3	60,3	5,6	5,6	82,93	0,6
28	318 29 36	88,4	88,5	5,8	5,8	97,11	0,6
29	59 52 5	16,6	16,6	6,0	6,0	11,29	0,7
30	161 14 34	44,7	44,8	6,2	6,2	25,48	0,7
31	262 37 3	72,9	72,9	6,4	6,4	39,66	0,7

Stunden.

1	4 13 26	1,2	1,2	0,0	0,0	0,59	0,0
2	8 26 52	2,3	2,3	0,0	0,0	1,18	0,0
3	12 40 19	3,5	3,5	0,0	0,0	1,77	0,0
4	16 53 45	4,7	4,7	0,0	0,0	2,36	0,0
5	21 7 11	5,9	5,9	0,0	0,0	2,95	0,0
6	25 20 37	7,0	7,0	0,1	0,1	3,55	0,0
7	29 34 4	8,2	8,2	0,1	0,1	4,14	0,0
8	33 47 30	9,4	9,4	0,1	0,1	4,73	0,0
9	38 0 56	10,6	10,6	0,1	0,1	5,32	0,0
10	42 14 22	11,7	11,7	0,1	0,1	5,91	0,0
11	46 27 48	12,9	12,9	0,1	0,1	6,50	0,0
12	50 41 15	14,1	14,1	0,1	0,1	7,09	0,0

Satellit II.

Stunden.

	θ'	a'	b'	c	d	e''	f
13	54° 54′ 41″	15,3	15,3	0,1	0,1	7,68	0,0
14	59 8 7	16,4	16,4	0,1	0,1	8,27	0,0
15	63 21 33	17,6	17,6	0,1	0,1	8,86	0,0
16	67 34 59	18,8	18,8	0,1	0,1	9,46	0,0
17	71 48 26	19,9	19,9	0,1	0,1	10,05	0,0
18	76 1 52	21,1	21,1	0,2	0,2	10,64	0,0
19	80 15 18	22,3	22,3	0,2	0,2	11,23	0,0
20	84 28 44	23,5	23,5	0,2	0,2	11,82	0,0
21	88 42 11	24,6	24,6	0,2	0,2	12,41	0,0
22	92 55 37	25,8	25,8	0,2	0,2	13,00	0,0
23	97 9 3	27,0	27,0	0,2	0,2	13,59	0,0
24	101 22 29	28,2	28,2	0,2	0,2	14,18	0,0

Bei dem Ausschreiben der Werthe von *a′*, *b′*.... für die Stunden, werden auch die Minuten u. s. w. berücksichtigt.

Minuten.

1	0° 4′ 13″	31	2° 10′ 57″
2	0 8 27	32	2 15 10
3	0 12 40	33	2 19 23
4	0 16 54	34	2 23 37
5	0 21 7	35	2 27 50
6	0 25 21	36	2 32 4
7	0 29 34	37	2 36 17
8	0 33 47	38	2 40 31
9	0 38 1	39	2 44 44
10	0 42 14	40	2 48 57
11	0 46 28	41	2 53 11
12	0 50 41	42	2 57 24
13	0 54 55	43	3 1 38
14	0 59 8	44	3 5 51
15	1 3 22	45	3 10 5
16	1 7 35	46	3 14 18
17	1 11 48	47	3 18 32
18	1 16 2	48	3 22 45
19	1 20 15	49	3 26 58
20	1 24 29	50	3 31 12
21	1 28 42	51	3 35 25
22	1 32 56	52	3 39 39
23	1 37 9	53	3 43 52
24	1 41 22	54	3 48 6
25	1 45 36	55	3 52 19
26	1 49 49	56	3 56 32
27	1 54 3	57	4 0 46
28	1 58 16	58	4 4 59
29	2 2 30	59	4 9 13
30	2 6 43	60	4 13 26

Satellit II.

Länge in der Bahn.

	a′	b′	c	d	e″		f	
0	0′ 0″	0″	0′ 0″	0′ 0″	0′ 0″		0″	100
1	+ 0 7	+ 3	+ 0 11	+ 0 5	+ 8 7	487	— 2	99
2	+ 0 15	+ 7	+ 0 23	+ 0 10	+16 5	478	— 5	98
3	+ 0 22	+10	+ 0 34	+ 0 15	+23 48	463	— 7	97
4	+ 0 30	+13	+ 0 45	+ 0 20	+31 6	438	— 9	96
5	+ 0 37	+16	+ 0 55	+ 0 25	+37 54	408	—11	95
6	+ 0 44	+19	+ 1 6	+ 0 30	+44 3	369	—13	94
7	+ 0 51	+22	+ 1 16	+ 0 34	+49 30	327	—15	93
8	+ 0 57	+25	+ 1 26	+ 0 39	+54 7	277	—17	92
9	+ 1 4	+28	+ 1 36	+ 0 43	+57 51	224	—19	91
10	+ 1 10	+31	+ 1 46	+ 0 47	+60 39	168	—21	90
11	+ 1 16	+33	+ 1 54	+ 0 51	+62 29	110	—23	89
12	+ 1 22	+36	+ 2 3	+ 0 55	+63 18	49	—25	88
13	+ 1 27	+38	+ 2 11	+ 0 59	+63 6	12	—26	87
14	+ 1 32	+40	+ 2 18	+ 1 2	+61 55	71	—28	86
15	+ 1 36	+42	+ 2 25	+ 1 5	+59 45	130	—29	85
16	+ 1 41	+44	+ 2 32	+ 1 8	+56 39	186	—30	84
17	+ 1 44	+46	+ 2 37	+ 1 11	+52 39	240	—32	83
18	+ 1 48	+47	+ 2 42	+ 1 13	+47 50	289	—33	82
19	+ 1 51	+48	+ 2 47	+ 1 15	+42 17	333	—34	81
20	+ 1 53	+49	+ 2 51	+ 1 17	+36 5	372	—34	80
21	+ 1 55	+50	+ 2 54	+ 1 18	+29 18	407	—35	79
22	+ 1 57	+51	+ 2 56	+ 1 19	+22 5	433	—35	78
23	+ 1 58	+52	+ 2 58	+ 1 20	+14 31	454	—36	77
24	+ 1 59	+52	+ 2 59	+ 1 20	+ 6 43	468	—36	76
25	+ 1 59	+52	+ 3 0	+ 1 20	— 1 11	474	—36	75
26	+ 1 59	+52	+ 2 59	+ 1 20	— 9 5	474	—36	74
27	+ 1 58	+52	+ 2 58	+ 1 20	—16 50	465	—36	73
28	+ 1 57	+51	+ 2 56	+ 1 19	—24 20	450	—35	72
29	+ 1 55	+50	+ 2 54	+ 1 18	—31 29	429	—35	71
30	+ 1 53	+49	+ 2 51	+ 1 17	—38 8	399	—34	70
31	+ 1 51	+48	+ 2 47	+ 1 15	—44 13	365	—34	69
32	+ 1 48	+47	+ 2 42	+ 1 13	—49 38	325	—33	68
33	+ 1 44	+46	+ 2 37	+ 1 11	—54 17	279	—32	67
34	+ 1 41	+44	+ 2 32	+ 1 8	—58 6	229	—30	66
35	+ 1 36	+42	+ 2 25	+ 1 5	—61 1	175	—29	65
36	+ 1 32	+40	+ 2 18	+ 1 2	—63 0	119	—28	64
37	+ 1 27	+38	+ 2 11	+ 0 59	—64 1	61	—26	63
38	+ 1 22	+36	+ 2 3	+ 0 55	—64 1	0	—25	62
39	+ 1 16	+33	+ 1 54	+ 0 51	—63 2	59	—23	61
40	+ 1 10	+31	+ 1 46	+ 0 47	—61 4	118	—21	60
41	+ 1 4	+28	+ 1 36	+ 0 43	—58 8	176	—19	59
42	+ 0 57	+25	+ 1 26	+ 0 39	—54 17	231	—17	58
43	+ 0 51	+22	+ 1 16	+ 0 34	—49 35	282	—15	57
44	+ 0 44	+19	+ 1 6	+ 0 30	—44 4	331	—13	56
45	+ 0 37	+16	+ 0 55	+ 0 25	—37 51	373	—11	55
46	+ 0 30	+13	+ 0 45	+ 0 20	—31 3	408	— 9	54
47	+ 0 22	+10	+ 0 34	+ 0 15	—23 44	439	— 7	53
48	+ 0 15	+ 7	+ 0 23	+ 0 10	—16 2	462	— 5	52
49	+ 0 7	+ 3	+ 0 11	+ 0 5	— 8 5	477	— 2	51
50	0 0	0	0 0	0 0	0 0	485	0	50

Wenn das Argument sich in der letzten Spalte findet, wird das entgegengesetzte Zeichen genommen.

Satellit II.

Radiusvector.

	a′	b′	c″		
0	—29	—13	— 940		100
1	—29	—13	— 933	7	99
2	—29	—13	— 910	23	98
3	—28	—12	— 873	37	97
4	—28	—12	— 821	52	96
5	—27	—12	— 757	64	95
6	—27	—12	— 681	76	94
7	—26	—11	— 594	87	93
8	—25	—11	— 497	97	92
9	—24	—11	— 393	104	91
10	—23	—10	— 282	111	90
11	—22	—10	— 166	116	89
12	—21	— 9	— 49	117	88
13	—20	— 9	+ 70	119	87
14	—18	— 8	+ 187	117	86
15	—17	— 7	+ 301	114	85
16	—15	— 7	+ 411	110	84
17	—14	— 6	+ 513	102	83
18	—12	— 5	+ 608	95	82
19	—11	— 5	+ 693	85	81
20	— 9	— 4	+ 767	74	80
21	— 7	— 3	+ 829	62	79
22	— 5	— 2	+ 878	49	78
23	— 4	— 2	+ 913	35	77
24	— 2	— 1	+ 934	21	76
25	0	0	+ 940	6	75
26	+ 2	+ 1	+ 931	9	74
27	+ 4	+ 2	+ 907	24	73
28	+ 5	+ 2	+ 870	37	72
29	+ 7	+ 3	+ 818	52	71
30	+ 9	+ 4	+ 754	64	70
31	+11	+ 5	+ 678	76	69
32	+12	+ 5	+ 591	87	68
33	+14	+ 6	+ 495	96	67
34	+15	+ 7	+ 391	104	66
35	+17	+ 7	+ 281	110	65
36	+18	+ 8	+ 167	114	64
37	+20	+ 9	+ 50	117	63
38	+21	+ 9	— 68	118	62
39	+22	+10	— 185	117	61
40	+23	+10	— 298	113	60
41	+24	+11	— 407	109	59
42	+25	+11	— 510	103	58
43	+26	+11	— 604	94	57
44	+27	+12	— 689	85	56
45	+27	+12	— 764	75	55
46	+28	+12	— 826	62	54
47	+28	+12	— 876	50	53
48	+29	+13	— 912	36	52
49	+29	+13	— 934	22	51
50	+29	+13	— 941	7	50

Satellit III.

Bewegungen in Julianischen Jahrzehnden.

Jahre	θ'' °	'	''	a''	b''	c	d	e''	e'''	f
+10	185	12	13	44,17	49,5	57,5	52,2	1,70	65,8	84,3
20	10	24	26	88,34	98,9	15,1	4,5	3,40	31,5	68,6
30	195	36	38	32,51	48,4	72,6	56,7	5,10	97,3	52,9
40	20	48	51	76,68	97,9	30,1	8,9	6,79	63,0	37,2
50	206	1	4	20,85	47,3	87,6	61,1	8,49	28,8	21,5
60	31	13	17	65,02	96,8	45,2	13,4	10,19	94,5	5,8
70	216	25	30	9,20	46,3	2,7	65,6	11,89	60,3	90,1
80	41	37	42	53,37	95,8	60,2	17,8	13,59	26,1	74,4
90	226	49	55	97,54	45,2	17,8	70,1	15,29	91,8	58,7
100	52	2	8	41,71	94,7	75,3	22,3	16,99	57,6	43,0

Epochen.

1830	1	34	44	54,76	34,5	78,4	98,7	83,18	29,2	72,5
1831	20	5	57	59,17	39,4	54,2	73,9	63,35	45,8	81,0
1832	38	37	11	63,59	44,4	29,9	49,1	43,52	62,4	89,4
1833	57	8	24	68,01	49,3	5,7	24,3	23,69	78,9	97,8
1834	75	39	37	72,43	54,3	81,4	99,6	3,86	95,5	6,3
1835	94	10	51	76,84	59,2	57,2	74,8	84,03	12,1	14,7
1836	112	42	4	81,26	64,2	32,9	50,0	64,20	28,7	23,1
1837	131	13	17	85,68	69,1	8,7	25,2	44,37	45,2	31,5
1838	149	44	30	90,09	74,1	84,4	0,5	24,54	61,8	40,0
1839	168	15	44	94,51	79,0	60,2	75,7	4,71	78,4	48,4
1840	186	46	57	98,93	84,0	35,9	50,9	84,88	95,0	56,8

Monate.

Januar	0	0	0	0,00	0,0	0,0	0,0	0,00	0,0	0,0
Febr.	119	50	49	33,23	33,3	6,4	6,4	39,66	47,5	0,7
März	88	44	28	24,53	24,6	12,2	12,2	36,77	71,1	1,4
April	208	35	17	57,76	57,9	18,7	18,5	76,43	18,7	2,1
May	278	7	3	77,02	77,2	24,9	24,7	1,90	58,2	2,8
Juni	37	57	53	10,24	10,5	31,3	31,1	41,56	5,8	3,5
Juli	107	29	38	29,50	29,8	37,5	37,3	67,04	45,3	4,2
Aug.	227	20	28	62,73	63,0	44,0	43,7	6,70	92,9	4,9
Septbr.	347	11	17	95,96	96,3	50,4	50,0	46,36	40,4	5,6
Octbr.	56	43	3	15,21	15,6	56,6	56,2	71,83	79,9	6,3
Novbr.	176	33	52	48,44	48,9	63,0	62,6	11,49	27,5	7,0
Decbr.	246	5	38	67,69	68,2	69,3	68,8	36,97	67,0	7,7

Satellit III.

Tage.

	θ''	a''	b''	c	d	e''	e'''	f
	° ′ ″							
1	50 19 4	13,98	14,0	0,2	0,2	14,18	8,0	0,0
2	100 38 7	27,95	28,0	0,4	0,4	28,37	16,0	0,0
3	150 57 11	41,93	41,9	0,6	0,6	42,55	24,0	0,1
4	201 16 14	55,90	55,9	0,8	0,8	56,73	31,9	0,1
5	251 35 18	69,88	69,9	1,0	1,0	70,91	39,9	0,1
6	301 54 21	83,85	83,9	1,2	1,2	85,10	47,9	0,1
7	352 13 25	97,83	97,8	1,5	1,4	99,28	55,9	0,2
8	42 32 28	11,80	11,8	1,7	1,6	13,46	63,9	0,2
9	92 51 32	25,78	25,8	1,9	1,9	27,64	71,9	0,2
10	143 10 35	39,75	39,8	2,1	2,1	41,83	79,9	0,2
11	193 29 39	53,73	53,7	2,3	2,3	56,01	87,8	0,3
12	243 48 42	67,70	67,7	2,5	2,5	70,19	95,8	0,3
13	294 7 46	81,68	81,7	2,7	2,7	84,37	3,8	0,3
14	344 26 49	95,65	95,7	2,9	2,9	98,56	11,8	0,3
15	34 45 53	9,63	9,6	3,1	3,1	12,74	19,8	0,3
16	85 4 56	23,60	23,6	3,3	3,3	26,92	27,8	0,4
17	135 24 0	37,58	37,6	3,5	3,5	41,10	35,7	0,4
18	185 43 3	51,55	51,6	3,7	3,7	55,29	43,7	0,4
19	236 2 7	65,53	65,6	3,9	3,9	69,47	51,7	0,4
20	286 21 11	79,50	79,5	4,1	4,1	83,65	59,7	0,5
21	336 40 14	93,48	93,5	4,4	4,3	97,83	67,7	0,5
22	26 59 18	7,45	7,5	4,6	4,5	12,02	75,7	0,5
23	77 18 21	21,43	21,5	4,8	4,7	26,20	83,7	0,5
24	127 37 25	35,40	35,4	5,0	4,9	40,38	91,6	0,6
25	177 56 28	49,38	49,4	5,2	5,1	54,56	99,6	0,6
26	228 15 32	63,35	63,4	5,4	5,4	68,75	7,6	0,6
27	278 34 35	77,33	77,4	5,6	5,6	82,93	15,6	0,6
28	328 53 39	91,30	91,3	5,8	5,8	97,11	23,6	0,6
29	19 12 42	5,28	5,3	6,0	6,0	11,29	31,6	0,7
30	69 31 46	19,25	19,3	6,2	6,2	25,48	39,6	0,7
31	119 50 49	33,23	33,3	6,4	6,4	39,66	47,5	0,7

Stunden.

	° ′ ″							
1	2 5 48	0,58	0,6	0,0	0,0	0,59	0,3	0,0
2	4 11 35	1,16	1,2	0,0	0,0	1,18	0,7	0,0
3	6 17 23	1,75	1,7	0,0	0,0	1,77	1,0	0,0
4	8 23 11	2,33	2,3	0,0	0,0	2,36	1,3	0,0
5	10 28 58	2,91	2,9	0,0	0,0	2,95	1,7	0,0
6	12 34 46	3,49	3,5	0,1	0,1	3,55	2,0	0,0
7	14 40 34	4,08	4,1	0,1	0,1	4,14	2,3	0,0
8	16 46 21	4,66	4,7	0,1	0,1	4,73	2,7	0,0
9	18 52 9	5,24	5,2	0,1	0,1	5,32	3,0	0,0
10	20 57 56	5,82	5.8	0,1	0,1	5,91	3,3	0,0
11	23 3 44	6,41	6,4	0,1	0,1	6,50	3,7	0,0
12	25 9 32	6,99	7,0	0,1	0,1	7,09	4,0	0,0

Satellit III.

Stunden.

	θ''	a''	b''	c	d	e''	e'''	f
	° ′ ″							
13	27 15 19	7,57	7,6	0,1	0,1	7,68	4,3	0,0
14	29 21 7	8,15	8,2	0,1	0,1	8,27	4,7	0,0
15	31 26 55	8,73	8,7	0,1	0,1	8,86	5,0	0,0
16	33 32 42	9,32	9,3	0,1	0,1	9,46	5,3	0,0
17	35 38 30	9,90	9,9	0,1	0,1	10,05	5,7	0,0
18	37 44 18	10,48	10,5	0,2	0,2	10,64	6,0	0,0
19	39 50 5	11,06	11,1	0,2	0,2	11,23	6,3	0,0
20	41 55 53	11,65	11,6	0,2	0,2	11,82	6,7	0,0
21	44 1 41	12,23	12,2	0,2	0,2	12,41	7,0	0,0
22	46 7 28	12,81	12,8	0,2	0,2	13,00	7,3	0,0
23	48 13 16	13,39	13,4	0,2	0,2	13,59	7,7	0,0
24	50 19 4	13,98	14,0	0,2	0,2	14,18	8,0	0,0

Bei dem Ausschreiben der Werthe von a'', b'',.... für die Stunden, werden auch die Minuten &c. berücksichtigt.

Minuten.

1	0° 2′ 6″	31	1° 5′ 0″
2	0 4 12	32	1 7 5
3	0 6 17	33	1 9 11
4	0 8 23	34	1 11 17
5	0 10 29	35	1 13 23
6	0 12 35	36	1 15 29
7	0 14 41	37	1 17 34
8	0 16 46	38	1 19 40
9	0 18 52	39	1 21 46
10	0 20 58	40	1 23 52
11	0 23 4	41	1 25 58
12	0 25 10	42	1 28 3
13	0 27 15	43	1 30 9
14	0 29 21	44	1 32 15
15	0 31 27	45	1 34 21
16	0 33 33	46	1 36 27
17	0 35 38	47	1 38 32
18	0 37 44	48	1 40 38
19	0 39 50	49	1 42 44
20	0 41 56	50	1 44 50
21	0 44 2	51	1 46 55
22	0 46 7	52	1 49 1
23	0 48 13	53	1 51 7
24	0 50 19	54	1 53 13
25	0 52 25	55	1 55 19
26	0 54 31	56	1 57 24
27	0 56 36	57	1 59 30
28	0 58 42	58	2 1 36
29	1 0 48	59	2 3 42
30	1 2 54	60	2 5 48

Satellit III.

Länge in der Bahn.

	a''	b''	c	d	e''	e'''	f	
0	0' 0''	0' 0''	0''	0''	0' 0''	0''	0''	100
1	+ 0 34	+ 0 8	— 2	— 1	— 0 17	+ 6	— 3	99
2	+ 1 8	+ 0 17	— 3	— 2	— 0 35	+12	— 6	98
3	+ 1 42	+ 0 26	— 5	— 2	— 0 52	+18	— 9	97
4	+ 2 15	+ 0 34	— 7	— 3	— 1 9	+24	—12	96
5	+ 2 48	+ 0 42	— 8	— 4	— 1 25	+29	—15	95
6	+ 3 20	+ 0 50	—10	— 5	— 1 41	+33	—18	94
7	+ 3 51	+ 0 58	—12	— 5	— 1 57	+37	—20	93
8	+ 4 21	+ 1 6	—13	— 6	— 2 12	+39	—23	92
9	+ 4 51	+ 1 13	—15	— 7	— 2 26	+41	—26	91
10	+ 5 19	+ 1 20	—16	— 7	— 2 40	+43	—28	90
11	+ 5 46	+ 1 27	—17	— 8	— 2 52	+43	—30	89
12	+ 6 12	+ 1 34	—19	— 9	— 3 5	+42	—33	88
13	+ 6 36	+ 1 40	—20	— 9	— 3 16	+41	—35	87
14	+ 6 58	+ 1 45	—21	—10	— 3 26	+39	—37	86
15	+ 7 19	+ 1 51	—22	—10	— 3 36	+36	—39	85
16	+ 7 38	+ 1 56	—23	—10	— 3 44	+32	—40	84
17	+ 7 56	+ 2 0	—24	—11	— 3 52	+28	—42	83
18	+ 8 11	+ 2 4	—25	—11	— 3 59	+23	—43	82
19	+ 8 25	+ 2 7	—26	—12	— 4 5	+18	—44	81
20	+ 8 36	+ 2 10	—26	—12	— 4 10	+13	—45	80
21	+ 8 46	+ 2 13	—27	—12	— 4 14	+ 7	—46	79
22	+ 8 53	+ 2 14	—27	—12	— 4 16	+ 1	—47	78
23	+ 8 58	+ 2 16	—27	—12	— 4 18	— 6	—47	77
24	+ 9 2	+ 2 17	—27	—12	— 4 19	—12	—48	76
25	+ 9 3	+ 2 17	—28	—12	— 4 20	—18	—48	75
26	+ 9 2	+ 2 17	—27	—12	— 4 19	—24	—48	74
27	+ 8 58	+ 2 16	—27	—12	— 4 17	—30	—47	73
28	+ 8 53	+ 2 14	—27	—12	— 4 14	—35	—47	72
29	+ 8 46	+ 2 13	—27	—12	— 4 10	—40	—46	71
30	+ 8 36	+ 2 10	—26	—12	— 4 6	—44	—45	70
31	+ 8 25	+ 2 7	—26	—12	— 4 0	—48	—44	69
32	+ 8 11	+ 2 4	—25	—11	— 3 54	—52	—43	68
33	+ 7 56	+ 2 0	—24	—11	— 3 46	—55	—42	67
34	+ 7 38	+ 1 56	—23	—10	— 3 38	—57	—40	66
35	+ 7 19	+ 1 51	—22	—10	— 3 29	—58	—39	65
36	+ 6 58	+ 1 45	—21	—10	— 3 19	—58	—37	64
37	+ 6 36	+ 1 40	—20	— 9	— 3 8	—58	—35	63
38	+ 6 12	+ 1 34	—19	— 9	— 2 57	—57	—33	62
39	+ 5 46	+ 1 27	—17	— 8	— 2 45	—56	—30	61
40	+ 5 19	+ 1 20	—16	— 7	— 2 32	—53	—28	60
41	+ 4 51	+ 1 13	—15	— 7	— 2 19	—50	—26	59
42	+ 4 21	+ 1 6	—13	— 6	— 2 5	—46	—23	58
43	+ 3 51	+ 0 58	—12	— 5	— 1 50	—42	—20	57
44	+ 3 20	+ 0 50	—10	— 5	— 1 35	—37	—18	56
45	+ 2 48	+ 0 42	— 8	— 4	— 1 20	—31	—15	55
46	+ 2 15	+ 0 34	— 7	— 3	— 1 4	—26	—12	54
47	+ 1 42	+ 0 26	— 5	— 2	— 0 49	—20	— 9	53
48	+ 1 8	+ 0 17	— 3	— 2	— 0 32	—13	— 6	52
49	+ 0 34	+ 0 8	— 2	— 1	— 0 16	— 7	— 3	51
50	0 0	0 0	0	0	0 0	0	0	50

Wenn das Argument sich in der letzten Spalte findet, wird das entgegengesetzte Zeichen genommen.

Satellit III.

Radiusvector.

	a''	b''	c''	e''	
0	— 132	—33	+69	—13	100
1	— 131	—33	+69	—12	99
2	— 131	—33	+69	—12	98
3	— 129	—33	+68	—11	97
4	— 128	—32	+67	—10	96
5	— 125	—32	+66	— 9	95
6	— 122	—31	+64	— 8	94
7	— 119	—30	+62	— 7	93
8	— 115	—29	+60	— 5	92
9	— 111	—28	+58	— 3	91
10	— 106	—27	+56	— 2	90
11	— 101	—26	+53	0	89
12	— 96	—24	+50	+ 2	88
13	— 90	—23	+47	+ 4	87
14	— 84	—21	+44	+ 5	86
15	— 77	—20	+40	+ 7	85
16	— 70	—18	+37	+ 8	84
17	— 63	—16	+33	+ 9	83
18	— 56	—14	+29	+10	82
19	— 48	—12	+25	+11	81
20	— 41	—10	+21	+12	80
21	— 33	— 8	+17	+13	79
22	— 25	— 6	+13	+13	78
23	— 16	— 4	+ 9	+13	77
24	— 8	— 2	+ 4	+13	76
25	0	0	0	+13	75
26	+ 8	+ 2	— 4	+12	74
27	+ 16	+ 4	— 8	+12	73
28	+ 25	+ 6	—12	+11	72
29	+ 33	+ 8	—16	+10	71
30	+ 41	+10	—20	+ 9	70
31	+ 48	+12	—24	+ 8	69
32	+ 56	+14	—28	+ 6	68
33	+ 63	+16	—32	+ 5	67
34	+ 70	+18	—35	+ 4	66
35	+ 77	+20	—38	+ 2	65
36	+ 84	+21	—41	0	64
37	+ 90	+23	—44	— 1	63
38	+ 96	+24	—47	— 3	62
39	+ 101	+26	—50	— 5	61
40	+ 106	+27	—52	— 6	60
41	+ 111	+28	—54	— 8	59
42	+ 115	+29	—56	— 9	58
43	+ 119	+30	—58	—10	57
44	+ 122	+31	—59	—11	56
45	+ 125	+32	—60	—12	55
46	+ 128	+32	—61	—13	54
47	+ 129	+33	—62	—14	53
48	+ 131	+33	—63	—14	52
49	+ 131	+33	—63	—14	51
50	+ 132	+33	—63	—14	50

Satellit IV.

Bewegungen in Julianischen Jahrzehnden.

Jahre	θ'''	a'''	b'''	e'''	f	g	h	i
+10	308° 28' 38''	78,4	83,71	65,8	84,3	2,7	19,0	1,9
20	256 57 16	56,8	67,42	31,5	68,6	5,4	38,0	3,8
30	205 25 54	35,2	51,13	97,3	52,9	8,1	56,9	5,8
40	153 54 32	13,7	34,85	63,0	37,2	10,8	75,9	7,7
50	102 23 9	92,1	18,56	28,8	21,5	13,5	94,9	9,6
60	50 51 47	70,5	2,27	94,5	5,8	16,2	13,9	11,5
70	359 20 25	48,9	85,98	60,3	90,1	18,6	32,9	13,4
80	307 49 3	27,3	69,69	26,1	74,4	21,5	51,9	15,4
90	256 17 41	5,7	53,40	91,8	58,7	24,2	70,8	17,3
100	204 46 19	84,1	37,12	57,6	43,0	26,9	89,8	19,2

Epochen.

1830	256 26 39	25,6	5,30	29,2	72,5	90,9	85,7	25,1
1831	215 17 31	13,4	93,67	45,8	81,0	51,2	57,6	25,3
1832	174 8 23	1,2	82,04	62,4	89,4	11,5	29,5	25,5
1833	132 59 14	89,1	70,41	78,9	97,8	71,8	1,4	25,7
1834	91 50 6	76,9	58,79	95,5	6,3	32,0	73,2	25,9
1835	50 40 58	64,8	47,16	12,1	14,7	92,3	45,1	26,1
1836	9 31 50	52,6	35,53	28,7	23,1	52,6	17,0	26,3
1837	328 22 42	40,4	23,90	45,2	31,5	12,8	88,9	26,5
1838	287 13 33	28,3	12,27	61,8	40,0	73,1	60,8	26,6
1839	246 4 25	16,1	0,64	78,4	48,4	33,4	32,7	26,8
1840	204 55 17	4,0	89,01	95,0	56,8	93,6	4,6	27,0

Monate.

Januar	0 0 0	0,0	00,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Febr.	308 42 16	85,7	85,73	47,5	0,7	70,1	84,3	0,0
März	192 41 44	53,4	53,49	71,1	1,4	4,3	50,8	0,0
April	141 23 59	39,1	39,23	18,7	2,1	74,4	35,2	0,1
May	68 31 59	18,8	18,97	58,2	2,8	32,5	13,6	0,1
Juni	17 14 15	4,5	4,71	5,8	3,5	2,6	97,9	0,1
Juli	304 22 15	84,2	84,50	45,3	4,2	60,7	76,3	0,1
Aug.	253 4 31	69,9	70,18	92,9	4,9	30,8	60,6	0,1
Septbr.	201 46 47	55,6	55,92	40,4	5,6	0,9	45,0	0,1
Octbr.	128 54 46	35,3	35,66	79,9	6,3	59,0	23,3	0,1
Novbr.	77 37 2	21,0	21,40	27,5	7,0	29,1	7,7	0,2
Decbr.	4 45 2	0,7	1,14	67,0	7,7	87,2	86,1	0,2

Satellit IV.

Tage.

	θ'''	a'''	b'''	e'''	f	g	h	i
1	21° 34′ 16″	6,0	5,99	8,0	0,0	11,9	5,9	0,0
2	43 8 32	12,0	11,98	16,0	0,0	16,0	11,9	0,0
3	64 42 48	18,0	17,97	24,0	0,1	35,8	17,8	0,0
4	86 17 4	24,0	23,97	31,9	0,1	47,8	23,8	0,0
5	107 51 20	29,9	29,96	39,9	0,1	59,7	29,7	0,0
6	129 25 36	35,9	35,95	47,9	0,1	71,6	35,7	0,0
7	150 59 52	41,9	41,94	55,9	0,2	83,6	41,6	0,0
8	172 34 8	47,9	47,93	63,9	0,2	95,5	47,6	0,0
9	194 8 24	53,9	53,92	71,9	0,2	7,4	53,5	0,0
10	215 42 40	59,9	59,91	79,9	0,2	19,4	59,5	0,0
11	237 16 56	65,9	65,91	87,8	0,3	31,3	65,4	0,0
12	258 51 12	71,9	71,90	95,8	0,3	43,3	71,4	0,0
13	280 25 28	77,9	77,89	3,8	0,3	55,2	77,3	0,0
14	301 59 44	83,9	83,88	11,8	0,3	67,1	83,2	0,0
15	323 34 0	89,8	89,87	19,8	0,3	79,1	89,2	0,0
16	345 8 16	95,8	95,86	27,8	0,4	91,0	95,1	0,0
17	6 42 32	1,8	1,85	35,7	0,4	2,9	1,1	0,0
18	28 16 48	7,8	7,85	43,7	0,4	14,9	7,0	0,0
19	49 51 4	13,8	13,84	51,7	0,4	26,8	13,0	0,0
20	71 25 20	19,8	19,83	59,7	0,5	38,8	18,9	0,0
21	92 59 36	25,8	25,82	67,7	0,5	50,7	24,9	0,0
22	114 33 52	31,8	31,81	75,7	0,5	62,6	30,8	0,0
23	136 8 8	37,8	37,80	83,7	0,5	74,6	36,8	0,0
24	157 42 24	43,8	43,79	91,6	0,6	86,5	42,7	0,0
25	179 16 40	49,7	49,79	99,6	0,6	98,4	48,7	0,0
26	200 50 56	55,7	55,78	7,6	0,6	10,4	54,6	0,0
27	222 25 12	61,7	61,77	15,6	0,6	22,3	60,6	0,0
28	243 59 28	67,7	67,76	23,6	0,6	34,3	66,5	0,0
29	265 33 44	73,7	73,75	31,6	0,7	46,2	72,4	0,0
30	287 8 0	79,7	79,74	39,6	0,7	58,1	78,4	0,0
31	308 42 16	85,7	85,73	47,5	0,7	70,1	84,3	0,0

Stunden.

	θ'''	a'''	b'''	e'''	f	g	h	i
1	0° 53′ 56″	0,2	0,25	0,3	0,0	0,5	0,2	0,0
2	1 47 51	0,5	0,50	0,7	0,0	1,0	0,5	0,0
3	2 41 47	0,7	0,75	1,0	0,0	1,5	0,7	0,0
4	3 35 43	1,0	1,00	1,3	0,0	2,0	1,0	0,0
5	4 29 38	1,2	1,25	1,7	0,0	2,5	1,2	0,0
6	5 23 34	1,5	1,50	2,0	0,0	3,0	1,5	0,0
7	6 17 30	1,7	1,75	2,3	0,0	3,5	1,7	0,0
8	7 11 25	2,0	2,00	2,7	0,0	4,0	2,0	0,0
9	8 5 21	2,2	2,25	3,0	0,0	4,5	2,2	0,0
10	8 59 17	2,5	2,50	3,3	0,0	5,0	2,5	0,0
11	9 53 12	2,7	2,75	3,7	0,0	5,5	2,7	0,0
12	10 47 8	3,0	3,00	4,0	0,0	6,0	3,0	0,0

Satellit IV.

Stunden.

	θ'''	a'''	b'''	e'''	f	g	h	i
	° ′ ″							
13	11 41 4	3,2	3,25	4,3	0,0	6,5	3,2	0,0
14	12 34 59	3,5	3,50	4,7	0,0	7,0	3,5	0,0
15	13 28 55	3,7	3,74	5,0	0,0	7,5	3,7	0,0
16	14 22 51	4,0	3,99	5,3	0,0	8,0	4,0	0,0
17	15 16 46	4,2	4,24	5,7	0,0	8,5	4,2	0,0
18	16 10 42	4,5	4,49	6,0	0,0	9,0	4,5	0,0
19	17 4 38	4,7	4,74	6,3	0,0	9,5	4,7	0,0
20	17 58 33	5,0	4,99	6,7	0,0	9,9	5,0	0,0
21	18 52 29	5,2	5,24	7,0	0,0	10,4	5,2	0,0
22	19 46 25	5,5	5,49	7,3	0,0	10,9	5,5	0,0
23	20 40 20	5,7	5,74	7,7	0,0	11,4	5,7	0,0
24	21 34 16	6,0	5,99	8,0	0,0	11,9	5,9	0,0

Bei dem Ausschreiben der Werthe von a''', b'''.... für die Stunden, werden auch die Minuten u. s. w. berücksichtigt.

Minuten.

1	0° 0′ 54″	31	0° 27′ 52″
2	0 1 48	32	0 28 46
3	0 2 42	33	0 29 40
4	0 3 36	34	0 30 34
5	0 4 30	35	0 31 27
6	0 5 24	36	0 32 21
7	0 6 18	37	0 33 15
8	0 7 12	38	0 34 9
9	0 8 6	39	0 35 3
10	0 8 59	40	0 35 57
11	0 9 53	41	0 36 51
12	0 10 47	42	0 37 45
13	0 11 41	43	0 38 39
14	0 12 35	44	0 39 33
15	0 13 29	45	0 40 27
16	0 14 23	46	0 41 21
17	0 15 17	47	0 42 15
18	0 16 11	48	0 43 9
19	0 17 5	49	0 44 2
20	0 17 59	50	0 44 56
21	0 18 52	51	0 45 50
22	0 19 46	52	0 46 44
23	0 20 40	53	0 47 38
24	0 21 34	54	0 48 32
25	0 22 28	55	0 49 26
26	0 23 22	56	0 50 20
27	0 24 16	57	0 51 14
28	0 25 10	58	0 52 8
29	0 26 4	59	0 53 2
30	0 26 58	60	0 53 56

Satellit IV.

Länge in der Bahn.

	a'''	b'''		e'''	f	g	h	i	
0	0′ 0″	0′ 0″	189	0″	0′ 0″	0″	0″	0″	100
1	— 0 4	+ 3 9	189	— 1	— 0 7	0	+ 1	— 1	99
2	— 0 9	+ 6 18	187	— 3	— 0 14	+ 1	+ 3	— 2	98
3	— 0 13	+ 9 25	185	— 4	— 0 21	+ 1	+ 4	— 3	97
4	— 0 18	+12 30	181	— 6	— 0 28	+ 1	+ 5	— 4	96
5	— 0 22	+15 31	178	— 7	— 0 35	+ 1	+ 7	— 5	95
6	— 0 26	+18 29	174	— 8	— 0 42	+ 2	+ 8	— 6	94
7	— 0 30	+21 23	168	— 9	— 0 48	+ 2	+ 9	— 7	93
8	— 0 34	+24 11	162	—10	— 0 55	+ 2	+10	— 8	92
9	— 0 38	+26 53	156	—11	— 1 1	+ 2	+12	— 9	91
10	— 0 42	+29 29	149	—11	— 1 7	+ 2	+13	— 9	90
11	— 0 46	+31 58	141	—12	— 1 12	+ 3	+14	—10	89
12	— 0 49	+34 19	133	—12	— 1 18	+ 3	+15	—11	88
13	— 0 52	+36 32	124	—12	— 1 23	+ 3	+16	—12	87
14	— 0 55	+38 36	114	—13	— 1 27	+ 3	+17	—12	86
15	— 0 58	+40 30	105	—13	— 1 32	+ 3	+18	—13	85
16	— 1 0	+42 15	95	—12	— 1 36	+ 4	+18	—14	84
17	— 1 3	+43 50	84	—12	— 1 39	+ 4	+19	—14	83
18	— 1 5	+45 14	74	—12	— 1 43	+ 4	+20	—15	82
19	— 1 7	+46 28	62	—12	— 1 45	+ 4	+20	—15	81
20	— 1 8	+47 30	51	—11	— 1 48	+ 4	+21	—15	80
21	— 1 9	+48 21	39	—11	— 1 50	+ 4	+21	—16	79
22	— 1 10	+49 0	28	—11	— 1 51	+ 4	+21	—16	78
23	— 1 11	+49 28	16	—10	— 1 52	+ 4	+22	—16	77
24	— 1 11	+49 44	4	—10	— 1 53	+ 4	+22	—16	76
25	— 1 12	+49 48	8	— 9	— 1 53	+ 4	+22	—16	75
26	— 1 11	+49 40	19	— 9	— 1 53	+ 4	+22	—16	74
27	— 1 11	+49 21	31	— 8	— 1 52	+ 4	+22	—16	73
28	— 1 10	+48 50	42	— 8	— 1 51	+ 4	+21	—16	72
29	— 1 9	+48 8	54	— 7	— 1 50	+ 4	+21	—16	71
30	— 1 8	+47 14	65	— 7	— 1 48	+ 4	+21	—15	70
31	— 1 7	+46 9	76	— 6	— 1 45	+ 4	+20	—15	69
32	— 1 5	+44 53	86	— 6	— 1 43	+ 4	+20	—15	68
33	— 1 3	+43 27	96	— 5	— 1 39	+ 4	+19	—14	67
34	— 1 0	+41 51	106	— 5	— 1 36	+ 4	+18	—14	66
35	— 0 58	+40 5	116	— 4	— 1 32	+ 3	+18	—13	65
36	— 0 55	+38 9	124	— 4	— 1 27	+ 3	+17	—12	64
37	— 0 52	+36 5	133	— 3	— 1 23	+ 3	+16	—12	63
38	— 0 49	+33 52	140	— 3	— 1 18	+ 3	+15	—11	62
39	— 0 46	+31 32	149	— 3	— 1 12	+ 3	+14	—10	61
40	— 0 42	+29 3	154	— 2	— 1 7	+ 2	+13	— 9	60
41	— 0 38	+26 29	161	— 2	— 1 1	+ 2	+12	— 9	59
42	— 0 34	+23 48	166	— 2	— 0 55	+ 2	+10	— 8	58
43	— 0 30	+21 2	171	— 2	— 0 48	+ 2	+ 9	— 7	57
44	— 0 26	+18 11	176	— 1	— 0 42	+ 2	+ 8	— 6	56
45	— 0 22	+15 15	178	— 1	— 0 35	+ 1	+ 7	— 5	55
46	— 0 18	+12 17	182	— 1	— 0 28	+ 1	+ 5	— 4	54
47	— 0 13	+ 9 15	184	— 1	— 0 21	+ 1	+ 4	— 3	53
48	— 0 9	+ 6 11	185	0	— 0 14	+ 1	+ 3	— 2	52
49	— 0 4	+ 3 6	186	0	— 0 7	0	+ 1	— 1	51
50	0 0	0 0		0	0 0	0	0	0	50

Wenn das Argument sich in der letzten Spalte findet, wird das entgegengesetzte Zeichen genommen.

Satellit IV.

Radiusvector.

	a'''	b'''		c'''	g	
0	+17	— 727	2	+19	— 1	100
1	+17	— 725	4	+19	— 1	99
2	+17	— 721	7	+19	— 1	98
3	+17	— 714	10	+19	— 1	97
4	+17	— 704	13	+18	— 1	96
5	+16	— 691	16	+18	— 1	95
6	+16	— 675	18	+17	— 1	94
7	+16	— 657	21	+17	— 1	93
8	+15	— 636	23	+16	— 1	92
9	+14	— 613	26	+16	— 1	91
10	+14	— 587	28	+15	— 1	90
11	+13	— 559	31	+14	— 1	89
12	+13	— 528	32	+13	— 1	88
13	+12	— 496	35	+12	— 1	87
14	+11	— 461	36	+12	— 1	86
15	+10	— 425	38	+11	— 1	85
16	+ 9	— 387	39	+10	— 1	84
17	+ 8	— 348	41	+ 9	— 1	83
18	+ 7	— 307	42	+ 8	— 1	82
19	+ 6	— 265	43	+ 7	— 1	81
20	+ 5	— 222	44	+ 7	0	80
21	+ 4	— 178	45	+ 6	0	79
22	+ 3	— 133	45	+ 5	0	78
23	+ 2	— 88	45	+ 4	0	77
24	+ 1	— 43	46	+ 4	0	76
25	0	+ 3	45	+ 3	0	75
26	— 1	+ 48	45	+ 3	0	74
27	— 2	+ 93	45	+ 2	0	73
28	— 3	+ 138	44	+ 1	0	72
29	— 4	+ 182	44	+ 1	0	71
30	— 5	+ 226	43	0	0	70
31	— 6	+ 269	41	0	+ 1	69
32	— 7	+ 310	40	0	+ 1	68
33	— 8	+ 350	39	— 1	+ 1	67
34	— 9	+ 389	38	— 1	+ 1	66
35	—10	+ 427	35	— 2	+ 1	65
36	—11	+ 462	34	— 2	+ 1	64
37	—12	+ 496	32	— 2	+ 1	63
38	—13	+ 528	30	— 3	+ 1	62
39	—13	+ 558	27	— 3	+ 1	61
40	—14	+ 585	26	— 3	+ 1	60
41	—14	+ 611	22	— 3	+ 1	59
42	—15	+ 633	21	— 4	+ 1	58
43	—16	+ 654	18	— 4	+ 1	57
44	—16	+ 672	15	— 4	+ 1	56
45	—16	+ 687	12	— 4	+ 1	55
46	—17	+ 699	10	— 4	+ 1	54
47	—17	+ 709	7	— 5	+ 1	53
48	—17	+ 716	4	— 5	+ 1	52
49	—17	+ 720	2	— 5	+ 1	51
50	—17	+ 722		— 5	+ 1	50

Argumente für die Breiten der Satelliten.

Bewegungen in Julianischen Jahrzehnden.

Jahre	Ψ	A	B	C	D
	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′
+ 10	0 8,30	120 38,8	25 24,1	6 46,6	247 7
20	0 16,61	241 17,7	50 48,2	13 33,3	134 15
30	0 24,91	1 56,5	76 12,3	20 19,9	21 22
40	0 33,21	122 35,3	101 36,4	27 6,6	268 29
50	0 41,52	243 14,2	127 0,5	33 53,2	155 37
60	0 49,82	3 53,0	152 24,6	40 39,8	42 44
70	0 58,12	124 31,8	177 48,7	47 26,5	289 51
80	1 6,43	245 10,6	203 12,8	54 13,1	176 58
90	1 14,73	5 49,5	228 36,8	60 59,8	64 6
100	1 23,04	126 28,3	254 0,9	67 46,4	311 13

Epochen.

1830	314 28,35	143 8,9	29 42,8	135 55,0	230 58
1831	314 29,18	155 12,8	32 15,2	136 35,6	291 41
1832	314 30,01	167 16,7	34 47,6	137 16,3	352 24
1833	314 30,84	179 20,6	37 20,0	137 57,0	53 6
1834	314 31,67	191 24,4	39 52,4	138 37,6	113 49
1835	314 32,50	203 28,3	42 24,8	139 18,3	174 32
1836	314 33,33	215 32,2	44 57,3	139 58,9	235 15
1837	314 34,16	227 36,1	47 29,7	140 39,6	295 57
1838	314 34,99	239 40,0	50 2,1	141 20,3	356 40
1839	314 35,82	251 43,9	52 34,5	142 0,9	57 23
1840	314 36,65	263 47,7	55 6,9	142 41,6	118 5

Monate.

Januar	0 0,00	0 0,0	0 0,0	0 0,0	0 0
Febr.	0,07	1 1,4	0 12,9	0 3,5	5 9
März	0,13	1 56,9	0 24,6	0 6,6	9 48
April	0,20	2 58,4	0 37,6	0 10,0	14 58
May	0,27	3 57,8	0 50,1	0 13,4	19 57
Juni	0,34	4 59,3	1 3,0	0 16,8	25 6
Juli	0,41	5 58,7	1 15,5	0 20,2	30 5
Aug.	0,48	7 0,2	1 28,5	0 23,6	35 14
Septbr.	0,55	8 1,6	1 41,4	0 27,1	40 24
Octbr.	0,62	9 1,1	1 53,9	0 30,4	45 23
Novbr.	0,69	10 2,5	2 6,8	0 33,8	50 32
Decbr.	0,76	11 1,9	2 19,4	0 37,2	55 31

Argumente für die Breiten der Satelliten.

Tage.	Ψ °	Ψ '	A °	A '	B °	B '	C °	C '	D °	D '
1	0	0,00	0	2,0	0	0,4	0	0,1	0	10
2		0,00	0	4,0	0	0,8	0	0,2	0	20
3		0,01	0	5,9	0	1,3	0	0,3	0	30
4		0,01	0	7,9	0	1,7	0	0,4	0	40
5		0,01	0	9,9	0	2,1	0	0,6	0	50
6		0,01	0	11,9	0	2,5	0	0,7	1	0
7		0,02	0	13,9	0	2,9	0	0,8	1	10
8		0,02	0	15,9	0	3,3	0	0,9	1	20
9		0,02	0	17,8	0	3,8	0	1,0	1	30
10		0,02	0	19,8	0	4,2	0	1,1	1	40
11		0,03	0	21,8	0	4,6	0	1,2	1	50
12		0,03	0	23,8	0	5,0	0	1,3	2	0
13		0,03	0	25,8	0	5,4	0	1,4	2	10
14		0,03	0	27,7	0	5,8	0	1,6	2	20
15		0,03	0	29,7	0	6,3	0	1,7	2	30
16		0,04	0	31,7	0	6,7	0	1,8	2	40
17		0,04	0	33,7	0	7,1	0	1,9	2	50
18		0,04	0	35,7	0	7,5	0	2,0	3	0
19		0,04	0	37,6	0	7,9	0	2,1	3	9
20		0,05	0	39,6	0	8,3	0	2,2	3	19
21		0,05	0	41,6	0	8,8	0	2,3	3	29
22		0,05	0	43,6	0	9,2	0	2,4	3	39
23		0,05	0	45,6	0	9,6	0	2,6	3	49
24		0,05	0	47,6	0	10,0	0	2,7	3	59
25		0,06	0	49,5	0	10,4	0	2,8	4	9
26		0,06	0	51,5	0	10,8	0	2,9	4	19
27		0,06	0	53,5	0	11,3	0	3,0	4	29
28		0,06	0	55,5	0	11,7	0	3,1	4	39
29		0,07	0	57,5	0	12,1	0	3,2	4	49
30		0,07	0	59,5	0	12,5	0	3,3	4	59
31		0,07	1	1,4	0	12,9	0	3,5	5	9

Bei dem Ausschreiben der Zahlen dieser Tafel für die Tage, werden auch die Stunden u. s. w. berücksichtigt.

Satellit I.

Breite, bezogen auf die Ebene der Jupitersbahn.

Das erste Glied ihres Ausdruckes wird durch die Formel

$\alpha \sin (v - \psi)$ $\log \alpha = 4{,}042914$

gesucht; was die folgenden Tafeln ergeben, wird hinzugesetzt.

°	°	v+A ″	v+B ″	v−D ″	°	°
0	180	0,0	0,0	0,0	180	360
1	179	— 0,6	—0,1	0,0	181	359
2	178	— 1,2	—0,2	+0,1	182	358
3	177	— 1,8	—0,4	+0,1	183	357
4	176	— 2,4	—0,5	+0,1	184	356
5	175	— 3,1	—0,6	+0,1	185	355
6	174	— 3,7	—0,7	+0,2	186	354
7	173	— 4,3	—0,8	+0,2	187	353
8	172	— 4,9	—0,9	+0,2	188	352
9	171	— 5,5	—1,1	+0,3	189	351
10	170	— 6,1	—1,2	+0,3	190	350
11	169	— 6,7	—1,3	+0,3	191	349
12	168	— 7,3	—1,4	+0,4	192	348
13	167	— 7,9	—1,5	+0,4	193	347
14	166	— 8,5	—1,6	+0,4	194	346
15	165	— 9,1	—1,8	+0,4	195	345
16	164	— 9,7	—1,9	+0,5	196	344
17	163	—10,3	—2,0	+0,5	197	343
18	162	—10,8	—2,1	+0,5	198	342
19	161	—11,4	—2,2	+0,6	199	341
20	160	—12,0	—2,3	+0,6	200	340
21	159	—12,6	—2,4	+0,6	201	339
22	158	—13,1	—2,6	+0,6	202	338
23	157	—13,7	—2,7	+0,7	203	337
24	156	—14,3	—2,8	+0,7	204	336
25	155	—14,8	—2,9	+0,7	205	335
26	154	—15,4	—3,0	+0,7	206	334
27	153	—15,9	—3,1	+0,8	207	333
28	152	—16,5	—3,2	+0,8	208	332
29	151	—17,0	—3,3	+0,8	209	331
30	150	—17,6	—3,4	+0,8	210	330
31	149	—18,1	—3,5	+0,9	211	329
32	148	—18,6	—3,6	+0,9	212	328
33	147	—19,1	—3,7	+0,9	213	327
34	146	—19,6	—3,8	+0,9	214	326
35	145	—20,1	—3,9	+1,0	215	325
36	144	—20,6	—4,0	+1,0	216	324
37	143	—21,1	—4,1	+1,0	217	323
38	142	—21,6	—4,2	+1,0	218	322
39	141	—22,1	—4,3	+1,1	219	321
40	140	—22,6	—4,4	+1,1	220	320
41	139	—23,0	—4,5	+1,1	221	319
42	138	—23,5	—4,5	+1,1	222	318
43	137	—23,9	—4,6	+1,2	223	317
44	136	—24,4	—4,7	+1,2	224	316
45	135	—24,8	—4,8	+1,2	225	315

°	°	v+A ″	v+B ″	v−D ″	°	°
45	135	—24,8	—4,8	+1,2	225	315
46	134	—25,2	—4,9	+1,2	226	314
47	133	—25,7	—5,0	+1,2	227	313
48	132	—26,1	—5,1	+1,3	228	312
49	131	—26,5	—5,1	+1,3	229	311
50	130	—26,9	—5,2	+1,3	230	310
51	129	—27,3	—5,3	+1,3	231	309
52	128	—27,7	—5,4	+1,3	232	308
53	127	—28,0	—5,4	+1,4	233	307
54	126	—28,4	—5,5	+1,4	234	306
55	125	—28,8	—5,6	+1,4	235	305
56	124	—29,1	—5,6	+1,4	236	304
57	123	—29,4	—5,7	+1,4	237	303
58	122	—29,8	—5,8	+1,4	238	302
59	121	—30,1	—5,8	+1,5	239	301
60	120	—30,4	—5,9	+1,5	240	300
61	119	—30,7	—6,0	+1,5	241	299
62	118	—31,0	—6,0	+1,5	242	298
63	117	—31,3	—6,1	+1,5	243	297
64	116	—31,5	—6,1	+1,5	244	296
65	115	—31,8	—6,2	+1,5	245	295
66	114	—32,1	—6,2	+1,6	246	294
67	113	—32,3	—6,3	+1,6	247	293
68	112	—32,6	—6,3	+1,6	248	292
69	111	—32,8	—6,4	+1,6	249	291
70	110	—33,0	—6,4	+1,6	250	290
71	109	—33,2	—6,4	+1,6	251	289
72	108	—33,4	—6,5	+1,6	252	288
73	107	—33,6	—6,5	+1,6	253	287
74	106	—33,7	—6,5	+1,6	254	286
75	105	—33,9	—6,6	+1,6	255	285
76	104	—34,1	—6,6	+1,6	256	284
77	103	—34,2	—6,6	+1,7	257	283
78	102	—34,3	—6,7	+1,7	258	282
79	101	—34,5	—6,7	+1,7	259	281
80	100	—34,6	—6,7	+1,7	260	280
81	99	—34,7	—6,7	+1,7	261	279
82	98	—34,8	—6,7	+1,7	262	278
83	97	—34,8	—6,7	+1,7	263	277
84	96	—34,9	—6,8	+1,7	264	276
85	95	—35,0	—6,8	+1,7	265	275
86	94	—35,0	—6,8	+1,7	266	274
87	93	—35,0	—6,8	+1,7	267	273
88	92	—35,1	—6,8	+1,7	268	272
89	91	—35,1	—6,8	+1,7	269	271
90	90	—35,1	—6,8	+1,7	270	270

Wenn das Argument sich in den beiden letzten Spalten findet, wird das entgegengesetzte Zeichen genommen.

Satellit II.

Breite, bezogen auf die Ebene der Jupitersbahn.

Das erste Glied ihres Ausdruckes wird durch die Formel

$\alpha' \sin(v' - \psi)$ $\log \alpha' = 4{,}040614$

gesucht; was die folgenden Tafeln ergeben, wird hinzugesetzt.

°	°	v'+A ′ ″	v'+B ′ ″	v'+C ″	v'−D ″	°	°
0	180	— 0 0,0	— 0 0	0,0	0,0	180	360
1	179	— 0 29,5	— 0 1,7	— 0,3	+0,1	181	359
2	178	— 0 59,0	— 0 3,5	— 0,7	+0,1	182	358
3	177	— 1 28,5	— 0 5,2	— 1,0	+0,2	183	357
4	176	— 1 57,9	— 0 6,9	— 1,4	+0,2	184	356
5	175	— 2 27,3	— 0 8,7	— 1,7	+0,3	185	355
6	174	— 2 56,7	— 0 10,4	— 2,1	+0,4	186	354
7	173	— 3 26,0	— 0 12,1	— 2,4	+0,4	187	353
8	172	— 3 55,2	— 0 13,8	— 2,8	+0,5	188	352
9	171	— 4 24,4	— 0 15,5	— 3,1	+0,5	189	351
10	170	— 4 53,5	— 0 17,2	— 3,5	+0,6	190	350
11	169	— 5 22,5	— 0 18,9	— 3,8	+0,6	191	349
12	168	— 5 51,4	— 0 20,7	— 4,1	+0,7	192	348
13	167	— 6 20,2	— 0 22,4	— 4,5	+0,8	193	347
14	166	— 6 48,9	— 0 24,0	— 4,8	+0,8	194	346
15	165	— 7 17,5	— 0 25,7	— 5,1	+0,9	195	345
16	164	— 7 45,9	— 0 27,4	— 5,5	+0,9	196	344
17	163	— 8 14,2	— 0 29,0	— 5,8	+1,0	197	343
18	162	— 8 42,3	— 0 30,7	— 6,2	+1,0	198	342
19	161	— 9 10,3	— 0 32,3	— 6,5	+1,1	199	341
20	160	— 9 38,1	— 0 34,0	— 6,8	+1,2	200	340
21	159	—10 5,7	— 0 35,6	— 7,1	+1,2	201	339
22	158	—10 33,2	— 0 37,2	— 7,5	+1,3	202	338
23	157	—11 0,4	— 0 38,8	— 7,8	+1,3	203	337
24	156	—11 27,5	— 0 40,4	— 8,1	+1,4	204	336
25	155	—11 54,3	— 0 42,0	— 8,4	+1,4	205	335
26	154	—12 20,9	— 0 43,5	— 8,7	+1,5	206	334
27	153	—12 47,3	— 0 45,1	— 9,0	+1,5	207	333
28	152	—13 13,5	— 0 46,6	— 9,3	+1,6	208	332
29	151	—13 39,4	— 0 48,1	— 9,7	+1,6	209	331
30	150	—14 5,1	— 0 49,6	—10,0	+1,7	210	330
31	149	—14 30,5	— 0 51,1	—10,3	+1,7	211	329
32	148	—14 55,7	— 0 52,6	—10,6	+1,8	212	328
33	147	—15 20,6	— 0 54,1	—10,9	+1,8	213	327
34	146	—15 45,1	— 0 55,5	—11,1	+1,9	214	326
35	145	—16 9,5	— 0 57,0	—11,4	+2,0	215	325
36	144	—16 33,5	— 0 58,4	—11,7	+2,0	216	324
37	143	—16 57,2	— 0 59,8	—12,0	+2,0	217	323
38	142	—17 20,6	— 1 1,1	—12,3	+2,1	218	322
39	141	—17 43,7	— 1 2,5	—12,5	+2,1	219	321
40	140	—18 6,4	— 1 3,8	—12,8	+2,2	220	320
41	139	—18 28,9	— 1 5,1	—13,1	+2,2	221	319
42	138	—18 51,0	— 1 6,4	—13,3	+2,3	222	318
43	137	—19 12,7	— 1 7,7	—13,6	+2,3	223	317
44	136	—19 34,1	— 1 9,0	—13,8	+2,4	224	316
45	135	—19 55,2	— 1 10,2	—14,1	+2,4	225	315

°	°	v'+A ′ ″	v'+B ′ ″	v'+C ″	v'−D ″	°	°
45	135	—19 55,2	— 1 10,2	—14,1	+2,4	225	315
46	134	—20 15,8	— 1 11,4	—14,3	+2,5	226	314
47	133	—20 36,1	— 1 12,6	—14,5	+2,5	227	313
48	132	—20 56,1	— 1 13,8	—14,8	+2,5	228	312
49	131	—21 15,6	— 1 14,9	—15,0	+2,6	229	311
50	130	—21 34,8	— 1 16,1	—15,2	+2,6	230	310
51	129	—21 53,5	— 1 17,2	—15,5	+2,6	231	309
52	128	—22 11,9	— 1 18,2	—15,7	+2,7	232	308
53	127	—22 29,9	— 1 19,3	—15,9	+2,7	233	307
54	126	—22 47,4	— 1 20,3	—16,1	+2,7	234	306
55	125	—23 4,5	— 1 21,3	—16,3	+2,8	235	305
56	124	—23 21,2	— 1 22,3	—16,5	+2,8	236	304
57	123	—23 37,5	— 1 23,3	—16,7	+2,8	237	303
58	122	—23 53,4	— 1 24,2	—16,9	+2,9	238	302
59	121	—24 8,8	— 1 25,1	—17,1	+2,9	239	301
60	120	—24 23,8	— 1 26,0	—17,2	+2,9	240	300
61	119	—24 38,3	— 1 26,9	—17,4	+3,0	241	299
62	118	—24 52,4	— 1 27,7	—17,6	+3,0	242	298
63	117	—25 6,0	— 1 28,5	—17,7	+3,0	243	297
64	116	—25 19,2	— 1 29,3	—17,9	+3,1	244	296
65	115	—25 31,9	— 1 30,0	—18,0	+3,1	245	295
66	114	—25 44,1	— 1 30,7	—18,2	+3,1	246	294
67	113	—25 55,9	— 1 31,4	—18,3	+3,1	247	293
68	112	—26 7,1	— 1 32,1	—18,4	+3,2	248	292
69	111	—26 18,0	— 1 32,7	—18,6	+3,2	249	291
70	110	—26 28,3	— 1 33,3	—18,7	+3,2	250	290
71	109	—26 38,1	— 1 33,9	—18,8	+3,2	251	289
72	108	—26 47,5	— 1 34,4	—18,9	+3,2	252	288
73	107	—26 56,4	— 1 35,0	—19,0	+3,2	253	287
74	106	—27 4,7	— 1 35,5	—19,1	+3,3	254	286
75	105	—27 12,6	— 1 35,9	—19,2	+3,3	255	285
76	104	—27 20,0	— 1 36,3	—19,3	+3,3	256	284
77	103	—27 26,9	— 1 36,7	—19,4	+3,3	257	283
78	102	—27 33,3	— 1 37,1	—19,5	+3,3	258	282
79	101	—27 39,2	— 1 37,5	—19,5	+3,3	259	281
80	100	—27 44,5	— 1 37,8	—19,6	+3,3	260	280
81	99	—27 49,5	— 1 38,1	—19,7	+3,4	261	279
82	98	—27 53,8	— 1 38,3	—19,7	+3,4	262	278
83	97	—27 57,6	— 1 38,6	—19,8	+3,4	263	277
84	96	—28 0,9	— 1 38,8	—19,8	+3,4	264	276
85	95	—28 3,8	— 1 38,9	—19,8	+3,4	265	275
86	94	—28 6,1	— 1 39,1	—19,9	+3,4	266	274
87	93	—28 7,9	— 1 39,2	—19,9	+3,4	267	273
88	92	—28 9,2	— 1 39,2	—19,9	+3,4	268	272
89	91	—28 9,9	— 1 39,3	—19,9	+3,4	269	271
90	90	—28 10,2	— 1 39,3	—19,9	+3,4	270	270

Wenn das Argument sich in den beiden letzten Spalten findet, wird das entgegengesetzte Zeichen genommen.

Satellit III.

Breite, bezogen auf die Ebene der Jupitersbahn.

Das erste Glied ihres Ausdruckes wird durch die Formel

$\alpha'' \sin(v''-\psi)$ $\log \alpha'' = 4{,}031239$

gesucht; was die folgenden Tafeln ergeben, wird hinzugesetzt.

		$v''+A$	$v''+B$	$v''+C$	$v''-D$		
°	°	″	′ ″	′ ″	″	°	°
0	180	0,0	0 0,0	0 0,0	0,0	180	360
1	179	+ 1,0	— 0 10,6	— 0 1,9	+0,1	181	359
2	178	+ 2,0	— 0 21,1	— 0 3,7	+0,2	182	358
3	177	+ 3,0	— 0 31,7	— 0 5,5	+0,3	183	357
4	176	+ 4,0	— 0 42,2	— 0 7,4	+0,5	184	356
5	175	+ 5,1	— 0 52,8	— 0 9,2	+0,6	185	355
6	174	+ 6,1	— 1 3,3	— 0 11,1	+0,7	186	354
7	173	+ 7,1	— 1 13,8	— 0 12,9	+0,8	187	353
8	172	+ 8,1	— 1 24,2	— 0 14,7	+0,9	188	352
9	171	+ 9,1	— 1 34,7	— 0 16,6	+1,0	189	351
10	170	+10,1	— 1 45,1	— 0 18,4	+1,2	190	350
11	169	+11,0	— 1 55,5	— 0 20,2	+1,3	191	349
12	168	+12,0	— 2 5,8	— 0 22,0	+1,4	192	348
13	167	+13,0	— 2 16,1	— 0 23,8	+1,5	193	347
14	166	+14,0	— 2 26,4	— 0 25,6	+1,6	194	346
15	165	+15,0	— 2 36,7	— 0 27,4	+1,7	195	345
16	164	+16,0	— 2 46,8	— 0 29,2	+1,8	196	344
17	163	+16,9	— 2 57,0	— 0 31,0	+2,0	197	343
18	162	+17,9	— 3 7,1	— 0 32,7	+2,1	198	342
19	161	+18,9	— 3 17,1	— 0 34,5	+2,2	199	341
20	160	+19,8	— 3 27,0	— 0 36,2	+2,3	200	340
21	159	+20,8	— 3 36,9	— 0 38,0	+2,4	201	339
22	158	+21,7	— 3 46,7	— 0 39,7	+2,5	202	338
23	157	+22,6	— 3 56,5	— 0 41,4	+2,6	203	337
24	156	+23,6	— 4 6,2	— 0 43,1	+2,7	204	336
25	155	+24,5	— 4 15,8	— 0 44,8	+2,8	205	335
26	154	+25,4	— 4 25,3	— 0 46,4	+2,9	206	334
27	153	+26,3	— 4 34,8	— 0 48,1	+3,0	207	333
28	152	+27,2	— 4 44,2	— 0 49,7	+3,1	208	332
29	151	+28,1	— 4 53,5	— 0 51,3	+3,2	209	331
30	150	+29,0	— 5 2,7	— 0 52,9	+3,4	210	330
31	149	+29,8	— 5 11,7	— 0 54,5	+3,5	211	329
32	148	+30,7	— 5 20,8	— 0 56,2	+3,6	212	328
33	147	+31,5	— 5 29,7	— 0 57,7	+3,6	213	327
34	146	+32,4	— 5 38,5	— 0 59,2	+3,7	214	326
35	145	+33,2	— 5 47,2	— 1 0,7	+3,8	215	325
36	144	+34,0	— 5 55,8	— 1 2,3	+3,9	216	324
37	143	+34,8	— 6 4,3	— 1 3,7	+4,0	217	323
38	142	+35,6	— 6 12,7	— 1 5,2	+4,1	218	322
39	141	+36,4	— 6 20,9	— 1 6,6	+4,2	219	321
40	140	+37,2	— 6 29,1	— 1 8,1	+4,3	220	320
41	139	+38,0	— 6 37,1	— 1 9,5	+4,4	221	319
42	138	+38,7	— 6 45,0	— 1 10,9	+4,5	222	318
43	137	+39,5	— 6 52,8	— 1 12,2	+4,6	223	317
44	136	+40,2	— 7 0,5	— 1 13,6	+4,6	224	316
45	135	+41,0	— 7 8,0	— 1 14,9	+4,7	225	315

		$v''+A$	$v''+B$	$v''+C$	$v''-D$		
°	°	″	′ ″	′ ″	″	°	°
45	135	+41,0	— 7 8,0	— 1 14,9	+4,7	225	315
46	134	+41,7	— 7 15,4	— 1 16,2	+4,8	226	314
47	133	+42,4	— 7 22,7	— 1 17,5	+4,9	227	313
48	132	+43,0	— 7 29,8	— 1 18,7	+5,0	228	312
49	131	+43,7	— 7 36,8	— 1 19,9	+5,1	229	311
50	130	+44,3	— 7 43,7	— 1 21,1	+5,1	230	310
51	129	+45,0	— 7 50,4	— 1 22,3	+5,2	231	309
52	128	+45,6	— 7 57,0	— 1 23,5	+5,3	232	308
53	127	+46,2	— 8 3,4	— 1 24,6	+5,4	233	307
54	126	+46,8	— 8 9,7	— 1 25,7	+5,4	234	306
55	125	+47,4	— 8 15,8	— 1 26,7	+5,5	235	305
56	124	+48,0	— 8 21,8	— 1 27,8	+5,6	236	304
57	123	+48,6	— 8 27,6	— 1 28,8	+5,6	237	303
58	122	+49,1	— 8 33,3	— 1 29,8	+5,7	238	302
59	121	+49,6	— 8 38,8	— 1 30,8	+5,7	239	301
60	120	+50,1	— 8 44,2	— 1 31,7	+5,8	240	300
61	119	+50,6	— 8 49,4	— 1 32,6	+5,9	241	299
62	118	+51,1	— 8 54,4	— 1 33,5	+5,9	242	298
63	117	+51,6	— 8 59,3	— 1 34,4	+6,0	243	297
64	116	+52,0	— 9 4,0	— 1 35,2	+6,0	244	296
65	115	+52,5	— 9 8,6	— 1 36,0	+6,1	245	295
66	114	+52,9	— 9 13,0	— 1 36,7	+6,1	246	294
67	113	+53,3	— 9 17,2	— 1 37,5	+6,2	247	293
68	112	+53,7	— 9 21,2	— 1 38,2	+6,2	248	292
69	111	+54,1	— 9 25,1	— 1 38,9	+6,3	249	291
70	110	+54,4	— 9 28,8	— 1 39,5	+6,3	250	290
71	109	+54,7	— 9 32,3	— 1 40,1	+6,3	251	289
72	108	+55,1	— 9 35,7	— 1 40,7	+6,4	252	288
73	107	+55,4	— 9 38,9	— 1 41,3	+6,4	253	287
74	106	+55,7	— 9 41,8	— 1 41,8	+6,4	254	286
75	105	+55,9	— 9 44,7	— 1 42,3	+6,5	255	285
76	104	+56,2	— 9 47,3	— 1 42,8	+6,5	256	284
77	103	+56,4	— 9 49,8	— 1 43,2	+6,5	257	283
78	102	+56,6	— 9 52,1	— 1 43,6	+6,6	258	282
79	101	+56,8	— 9 54,2	— 1 44,0	+6,6	259	281
80	100	+57,0	— 9 56,1	— 1 44,3	+6,6	260	280
81	99	+57,2	— 9 57,8	— 1 44,6	+6,6	261	279
82	98	+57,3	— 9 59,4	— 1 44,9	+6,6	262	278
83	97	+57,5	—10 0,8	— 1 45,1	+6,7	263	277
84	96	+57,6	—10 2,0	— 1 45,3	+6,7	264	276
85	95	+57,7	—10 3,0	— 1 45,5	+6,7	265	275
86	94	+57,8	—10 3,8	— 1 45,6	+6,7	266	274
87	93	+57,8	—10 4,5	— 1 45,8	+6,7	267	273
88	92	+57,9	—10 4,9	— 1 45,8	+6,7	268	272
89	91	+57,9	—10 5,2	— 1 45,9	+6,7	269	271
90	90	+57,9	—10 5,3	— 1 45,9	+6,7	270	270

Wenn das Argument sich in den beiden letzten Spalten findet, wird das entgegengesetzte Zeichen genommen.

Satellit IV.

Breite, bezogen auf die Ebene der Jupitersbahn.

Das erste Glied ihres Ausdruckes wird durch die Formel

$$\alpha''' \sin (v'''-\psi) \; . \; . \; . \; . \; . \; \log \alpha''' = 3{,}981506$$

gesucht; was die folgenden Tafeln ergeben, wird hinzugesetzt.

		$v'''+A$	$v'''+B$	$v'''+C$	$v'''-D$					$v'''+A$	$v'''+B$	$v'''+C$	$v'''-D$		
°	°	"	′ "	′ "	"	°	°	°	°	"	′ "	′ "	"	°	°
0	180	0,0	0 0,0	0 0,0	0,0	180	360	45	135	+1,1	+ 1 24,1	— 9 59,6	+ 9,9	225	315
1	179	0,0	+ 0 2,1	— 0 14,8	+0,2	181	359	46	134	+1,2	+ 1 25,6	—10 9,9	+10,1	226	314
2	178	+0,1	+ 0 4,2	— 0 29,6	+0,5	182	358	47	133	+1,2	+ 1 27,0	—10 20,1	+10,2	227	313
3	177	+0,1	+ 0 6,2	— 0 44,4	+0,7	183	357	48	132	+1,2	+ 1 28,4	—10 30,1	+10,4	228	312
4	176	+0,1	+ 0 8,3	— 0 59,1	+1,0	184	356	49	131	+1,2	+ 1 29,8	—10 39,9	+10,6	229	311
5	175	+0,1	+ 0 10,4	— 1 13,9	+1,2	185	355	50	130	+1,2	+ 1 31,2	—10 49,5	+10,7	230	310
6	174	+0,2	+ 0 12,4	— 1 28,6	+1,5	186	354	51	129	+1,2	+ 1 32,5	—10 58,9	+10,9	231	309
7	173	+0,2	+ 0 14,5	— 1 43,3	+1,7	187	353	52	128	+1,3	+ 1 33,8	—11 8,1	+11,0	232	308
8	172	+0,2	+ 0 16,6	— 1 58,0	+1,9	188	352	53	127	+1,3	+ 1 35,0	—11 17,2	+11,2	233	307
9	171	+0,2	+ 0 18,6	— 2 12,6	+2,2	189	351	54	126	+1,3	+ 1 36,3	—11 26,0	+11,3	234	306
10	170	+0,3	+ 0 20,7	— 2 27,2	+2,4	190	350	55	125	+1,3	+ 1 37,5	—11 34,5	+11,5	235	305
11	169	+0,3	+ 0 22,7	— 2 41,8	+2,7	191	349	56	124	+1,3	+ 1 38,7	—11 42,9	+11,6	236	304
12	168	+0,3	+ 0 24,8	— 2 56,3	+2,9	192	348	57	123	+1,3	+ 1 39,8	—11 51,1	+11,7	237	303
13	167	+0,3	+ 0 26,8	— 3 10,7	+3,1	193	347	58	122	+1,4	+ 1 40,9	—11 59,0	+11,9	238	302
14	166	+0,4	+ 0 28,8	— 3 25,1	+3,4	194	346	59	121	+1,4	+ 1 42,0	—12 6,8	+12,0	239	301
15	165	+0,4	+ 0 30,8	— 3 39,5	+3,6	195	345	60	120	+1,4	+ 1 43,1	—12 14,3	+12,1	240	300
16	164	+0,4	+ 0 32,8	— 3 53,7	+3,9	196	344	61	119	+1,4	+ 1 44,1	—12 21,6	+12,2	241	299
17	163	+0,4	+ 0 34,8	— 4 7,9	+4,1	197	343	62	118	+1,4	+ 1 45,1	—12 28,6	+12,4	242	298
18	162	+0,5	+ 0 36,8	— 4 22,0	+4,3	198	342	63	117	+1,4	+ 1 46,0	—12 35,5	+12,5	243	297
19	161	+0,5	+ 0 38,8	— 4 36,0	+4,6	199	341	64	116	+1,4	+ 1 47,0	—12 42,1	+12,6	244	296
20	160	+0,5	+ 0 40,7	— 4 50,0	+4,8	200	340	65	115	+1,4	+ 1 47,9	—12 48,5	+12,7	245	295
21	159	+0,5	+ 0 42,6	— 5 3,9	+5,0	201	339	66	114	+1,5	+ 1 48,7	—12 54,6	+12,8	246	294
22	158	+0,6	+ 0 44,6	— 5 17,6	+5,2	202	338	67	113	+1,5	+ 1 49,5	—13 0,5	+12,9	247	293
23	157	+0,6	+ 0 46,5	— 5 31,3	+5,5	203	337	68	112	+1,5	+ 1 50,3	—13 6,2	+13,0	248	292
24	156	+0,6	+ 0 48,4	— 5 44,9	+5,7	204	336	69	111	+1,5	+ 1 51,1	—13 11,6	+13,1	249	291
25	155	+0,7	+ 0 50,3	— 5 58,3	+5,9	205	335	70	110	+1,5	+ 1 51,8	—13 16,8	+13,2	250	290
26	154	+0,7	+ 0 52,2	— 6 11,7	+6,1	206	334	71	109	+1,5	+ 1 52,5	—13 21,7	+13,2	251	289
27	153	+0,7	+ 0 54,0	— 6 24,9	+6,4	207	333	72	108	+1,5	+ 1 53,2	—13 26,4	+13,3	252	288
28	152	+0,7	+ 0 55,9	— 6 38,1	+6,6	208	332	73	107	+1,5	+ 1 53,8	—13 30,8	+13,4	253	287
29	151	+0,8	+ 0 57,7	— 6 51,1	+6,8	209	331	74	106	+1,5	+ 1 54,4	—13 35,0	+13,5	254	286
30	150	+0,8	+ 0 59,5	— 7 4,0	+7,0	210	330	75	105	+1,5	+ 1 54,9	—13 39,0	+13,5	255	285
31	149	+0,8	+ 1 1,3	— 7 16,7	+7,2	211	329	76	104	+1,6	+ 1 55,5	—13 42,7	+13,6	256	284
32	148	+0,9	+ 1 3,0	— 7 29,3	+7,4	212	328	77	103	+1,6	+ 1 56,0	—13 46,1	+13,6	257	283
33	147	+0,9	+ 1 4,8	— 7 41,8	+7,6	213	327	78	102	+1,6	+ 1 56,4	—13 49,4	+13,7	258	282
34	146	+0,9	+ 1 6,6	— 7 54,1	+7,8	214	326	79	101	+1,6	+ 1 56,8	—13 52,3	+13,7	259	281
35	145	+0,9	+ 1 8,3	— 8 6,3	+8,0	215	325	80	100	+1,6	+ 1 57,2	—13 55,0	+13,8	260	280
36	144	+0,9	+ 1 10,0	— 8 18,4	+8,2	216	324	81	99	+1,6	+ 1 57,5	—13 57,5	+13,8	261	279
37	143	+1,0	+ 1 11,7	— 8 30,3	+8,4	217	323	82	98	+1,6	+ 1 57,8	—13 59,6	+13,9	262	278
38	142	+1,0	+ 1 13,2	— 8 42,0	+8,6	218	322	83	97	+1,6	+ 1 58,1	—14 1,6	+13,9	263	277
39	141	+1,0	+ 1 14,9	— 8 53,6	+8,8	219	321	84	96	+1,6	+ 1 58,4	—14 3,2	+13,9	264	276
40	140	+1,0	+ 1 16,5	— 9 5,0	+9,0	220	320	85	95	+1,6	+ 1 58,5	—14 4,7	+13,9	265	275
41	139	+1,0	+ 1 18,1	— 9 16,3	+9,2	221	319	86	94	+1,6	+ 1 58,7	—14 5,8	+14,0	266	274
42	138	+1,1	+ 1 19,6	— 9 27,3	+9,4	222	318	87	93	+1,6	+ 1 58,8	—14 6,7	+14,0	267	273
43	137	+1,1	+ 1 21,2	— 6 38,3	+9,5	223	317	88	92	+1,6	+ 1 58,9	—14 7,4	+14,0	268	272
44	136	+1,1	+ 1 22,7	— 9 49,0	+9,7	224	316	89	91	+1,6	+ 1 59,0	—14 7,8	+14,0	269	271
45	135	+1,1	+ 1 24,1	— 9 59,6	+9,9	225	315	90	90	+1,6	+ 1 59,0	—14 7,9	+14,0	270	270

Wenn das Argument sich in den beiden letzten Spalten findet, wird das entgegengesetzte Zeichen genommen.

X.

Analyse der Finsternisse

Die folgende Abhandlung ist der Theorie der Erscheinungen gewidmet, welche sich an verschiedenen Punkten der Erde zeigen, wenn ihre und zweier Himmelskörper relative Bewegung den näheren zwischen sie und den entfernteren führt; einer Theorie, welche oft, vielleicht öfter als irgend eine andere, Bemühungen der Astronomen und Geometer hervorgerufen hat. Nach so vielen vorangegangenen Arbeiten bedarf die meinige einer Einleitung, welche nachweiset, was jene noch zu wünschen übrig liessen.

Jede Theorie der Finsternisse muss von der Bedingung ausgehen, dass die Ränder zweier Gestirne, deren Grössen gegeben sind, sich berühren; also, wenn sie analytisch entwickelt werden soll, von der Gleichung zwischen den Örtern der Mittelpunkte der beiden Gestirne und des Auges, welche der Ausdruck dieser Bedingung ist. Ich werde daher die angewandten verschiedenen Arten dieses Ausdruckes darstellen und mit der in der bekannten Projectionsmethode der Sonnenfinsternisse enthaltenen anfangen.

Wenn man die Sonne, aus einem beliebigen, der täglichen Bewegung folgenden Gesichtspunkte auf der Erde, auf eine Ebene projicirt, welche, senkrecht auf der, die Mittelpunkte der ersteren und der Erde miteinander verbindenden Linie, durch den Mittelpunkt des Mondes gelegt ist, so zeigt dieser Entwurf den Mittelpunkt der Sonne in derselben Curve bewegt, in welcher der Gesichtspunkt, von ihm aus, bewegt

erscheint; den Mittelpunkt des Mondes da, wo er sich wirklich befindet. Die Sonne und den Mond selbst zeigt der Entwurf als Ellipsen, erzeugt durch die Schnitte der Projectionsebene und der sie einhüllenden Kegel, deren Spitzen im Gesichtspunkte liegen; welche Ellipsen aber kaum von den grössten Kreisen zweier Kugeln verschieden sind, deren erste von dem die Sonne einhüllenden Kegel eingehüllt wird während ihr Mittelpunkt sich in der Projectionsebene befindet, und deren andere der Mond selbst ist. Dieser Entwurf entspricht vollkommen der Erscheinung der Sonne und des Mondes am Himmel: die Bedingung dass die Ränder beider Gestirne sich berühren, erlangt also durch den Entwurf den Ausdruck, dass die in ihm gemessene Entfernung gleichzeitiger Örter beider, der Summe (oder dem Unterschiede) der auf der Projectionsebene entworfenen Halbmesser der Sonne und des Mondes gleich werde. — Ich benutze diese Gelegenheit, über die vielfältig behandelte Projectionsart der Sonnenfinsternisse einige Worte zu sagen. Die, die *Flamsteed* im Jahre 1680 bekannt machte *), ist eine Näherung an die hier erklärte; von ihr abweichend durch die Substitution der orthographischen Projection des Parallels des Gesichtspunkts, statt der perspectivischen seiner Bewegung, und durch die Entwerfung der Sonnenkugel aus dem Mittelpunkte der Erde, statt aus dem Gesichtspunkte. Hierdurch wird sie leichter ausführbar, ohne so unrichtig zu werden, dass sie nicht angewandt werden dürfte wenn nur eine Näherung verlangt wird. Die Ehre ihrer *ersten* Erfindung tritt *Flamsteed* dem berühmten Baumeister *Sir Christopher Wren* ab, der jedoch nie etwas darüber bekannt gemacht hat; auch *Dominicus Cassini* ist, wahrscheinlich durch eigene Kraft, darauf geführt worden. — Später hat *Lambert* die Eigenschaft der stereographischen Projection, jeden Kreis als Kreis darzustellen, angewandt, um dadurch die Zeichnung der Ellipse zu vermeiden, welche der orthographische Entwurf des Parallels ist **). *Lagrange* hat eine sinnreiche Construction angegeben ***), wodurch die *Flamsteed*sche so verändert wird, dass sie die Entfernung zeigt, in welcher die Mittel-

*) In einem Werke, welches in *Delambre's* Hist. de l'Astr. du 18. Siècle. p. 93 angeführt, mir aber unbekannt geblieben ist.

**) Beiträge zum Gebrauche der Mathematik. II. Thl. 2. Abschn. S. 727 &. Berlin 1770.

***) Berliner Astr. Jahrb. für 1781. S. 41 &.

punkte der Sonne und des Mondes am Gesichtspunkte erscheinen; allein für die Zeichnung der Finsternisse wird dadurch nichts gewonnen, da sie zugleich die Anwendung des *scheinbaren* Halbmessers des Mondes fordern würde, welcher nicht leichter zu erlangen ist, als der in der früheren Entwerfungsart vorausgesetzte Halbmesser des Entwurfes der Sonne von dem Gesichtspunkte aus. Wollte man die *Lagrange*sche Construction auf Fixsternenbedeckungen anwenden, so würde sie erst durch ihre Verbindung mit dem *scheinbaren* Halbmesser des Mondes so richtig werden, als die *Flamsteed*sche unmittelbar ist.

Ein *anderer* Ausdruck der Bedingung der Ränderberührung ist der ganz dem *Augenscheine* folgende, nämlich der, dass die Entfernung der *scheinbaren* Örter der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes, der Summe (oder dem Unterschiede) ihrer *scheinbaren* Halbmesser gleich sei. Dieser Ausdruck ist am häufigsten, auch in neuerer Zeit, verfolgt worden. Indem die darin angewandten *scheinbaren* Grössen nur durch Rechnung, für jeden besonderen Fall, gefunden werden können, kann er nicht die Grundlage einer allgemeinen Theorie der Finsternisse sein. Indessen haben die Astronomen seine Anwendung dadurch erleichtert, dass sie den geocentrischen Ort und Halbmesser der Sonne, statt der scheinbaren angenommen, dagegen aber den Unterschied der Horizontalparallaxen des Mondes und der Sonne, statt der ersteren in der Rechnung angewandt haben; wodurch ihr Resultat nicht mehr als einige Hundertelsecunden fehlerhaft werden kann.

Den *dritten* Ausdruck derselben Bedingung hat *Lagrange* in der wichtigen Abhandlung erlangt, in welcher er zuerst die analytische Geometrie auf die Theorie der Finsternisse angewandt hat*). Er geht von der Gleichung aus, welche bedingt, dass die Entfernung der *scheinbaren* Örter der Gestirne, der Summe (oder dem Unterschiede) der *scheinbaren* Halbmesser gleich sei; allein er schafft diese scheinbaren Grössen daraus fort, indem er auf den Mittelpunkt der Erde sich beziehende dafür einführt. Um der nur solche Grössen enthaltenden Gleichung die einfachste Form zu geben, in welcher *Lagrange* sie darstellt, waren verschiedene Vernachlässigungen nothwendig, von welchen er

*) Berliner Astr. Jahrb. für 1782. S. 46.

zwar nachweiset, dass sie die Anwendungen wenig beeinträchtigen, welche aber doch den Wunsch erregen, dass sich ein Mittel finden möge, einer Gleichung, welche die *Grundlage* jeder weiteren Analyse der Finsternisse werden soll, bei gleicher Einfachheit geometrische Strenge zu geben. Wenn der unsterbliche Geometer, dem wir die angeführte Abhandlung verdanken, nicht die Absicht gehabt hätte, die Hülfsmittel der analytischen Geometrie an einem Beispiele in helles Licht zu stellen, sondern wenn er nur seine Grundgleichung der Analyse der Finsternisse hätte erlangen wollen, so würde er sie vielleicht aus der oben erklärten Projection entnommen haben, welche wirklich nichts Anderes ist als die graphische Darstellung dieser Gleichung. *Dionis du Séjour* ist auf diese Art zu der Grundgleichung gelangt *).

Die in der folgenden Abhandlung enthaltene Analyse der Finsternisse geht von einer Gleichung aus, welche *geometrische Richtigkeit* mit der *grössten Einfachheit* vereinigt. Diese Gleichung ist nichts Anderes, als der Ausdruck der Bedingung, dass das Auge sich in der einen oder der anderen der beiden, beide Gestirne einhüllenden Oberflächen befinden muss, wenn es eine äussere oder eine innere Berührung ihrer Ränder sehen soll: vorausgesetzt dass die Gestirne Kugeln sind, ist sie also die Gleichung des *geraden Kegels*. — Da diese nur in ihrer einfachsten Gestalt erscheint, wenn eine der Axen der rechtwinklichten Coordinaten, der Axe des Kegels parallel genommen wird, so ist hierdurch die Richtung jener Axe bestimmt, indem sie dieselbe ist, in welcher das eine der beiden Gestirne von dem anderen erscheint. Nachdem sowohl diese Richtung, als auch der den Kegel erzeugende Winkel und der Ort seiner Spitze, aus den Örtern und Halbmessern beider Gestirne abgeleitet worden sind, kommt ferner nur der Ort *eines von ihnen* in Betracht, wodurch die Analyse der Bedingung der Ränderberührung bedeutend vereinfacht wird. Der *erste Abschnitt* der folgenden Abhandlung enthält Alles was zur Erfindung der in der Grundgleichung dieser Analyse vorkommenden Grössen erforderlich ist. Ich füge ihm die Bemerkung hinzu, dass *alle* Aufgaben, welche die gegenseitige Stellung zweier, der Einwirkung ihrer Parallaxen unterworfenen Gestirne betreffen, ihre

*) Traité Analytique &c. Tome I. Chap. I. Dieses Werk ist zwar erst 1786 erschienen, jedoch aus früher schon gedruckten Abhandlungen zusammengesetzt.

einfachste Auflösung erhalten, wenn die Örter derselben auf den Punkt der Himmelskugel bezogen werden, welcher die Richtung von dem einen zu dem anderen bezeichnet; welcher Punkt der ist, wo grösste Kreise, durch die von jedem beliebigen Punkte aus gesehenen Örter der Gestirne gelegt, sich durchschneiden. Ferner bemerke ich, dass eine Projection des Mondes und der Bewegung des Gesichtspunkts, aus der Spitze des Schattenkegels auf jede beliebige Ebene, die Zeiten der Ränderberührungen vollkommmen genau bestimmt; z. B. auf die, senkrecht auf die Axe des Kegels, durch den Mittelpunkt der Erde gelegte Ebene, auf welcher der Mond als ein Kreis, das Parallel als eine Ellipse erscheint; oder auf die Ebene des Erdaequators, auf welcher der Mond die Ellipse, das Parallel der Kreis wird.

Nach der Erlangung der wahren Grundgleichung der Analyse der Finsternisse, kann auch eine *wahre* Auflösung der Aufgaben gesucht werden, welche den Hergang einer Finsterniss auf der ganzen Erde betreffen. Diese Auflösung hat keine Schwierigkeit wenn man die Aufgaben dadurch verändert, dass man die Erde als kugelförmig ansieht; sie wird noch kürzer wenn auch statt des Schattenkegels ein Cylinder angenommen wird. Worauf sie sich dann reducirt, habe ich am Anfange des §. 32 angeführt. Die Auflösung der so erleichterten Aufgaben ist seit langer Zeit bekannt, auch gewöhnlich angewandt worden, um Linien auf der Erde kennen zu lernen, auf welchen die eine oder andere Art der Erscheinung einer bevorstehenden Sonnenfinsterniss zu erwarten war. Diese Linien sind häufig auf Erdkarten dargestellt worden, welche einen Überblick über die Art, wie eine Finsterniss sich auf der Erde zeigen wird, gewähren, und auch den Nutzen haben können, die Punkte kennen zu lehren, wo Beobachtungen der Finsterniss, am vortheilhaftsten für einen oder den anderen Zweck, angestellt werden können. Diesen Nutzen haben solche Darstellungen der Durchgänge der Venus durch die Sonne gehabt, indem sie die Wahl der Örter leiteten, wohin die Astronomen, welche diese Erscheinungen zu beobachten beabsichtigten, sich in den Jahren 1761 und 1769 begaben. — Wenn die erwähnten Linien nur dieses Zweckes wegen gesucht werden, so erscheinen Fehler ihrer Züge von einem oder ein Paar Grad als unerheblich; destomehr, da man nie rathsam finden wird,

einen Beobachtungsort sehr nahe an der Gränze zu wählen, wo die Erscheinung, welche wahrgenommen werden soll, aufhört sichtbar zu sein. Die in dem jetzigen Zustande der Astronomie noch vorhandenen Unsicherheiten der Elemente einer Finsterniss widersetzen sich auch der Erlangung eines, ein oder einige Zehntel eines Grades verbürgenden Erfolges. Ich bin daher der Meinung, dass jede Vermehrung der Arbeit, welche nöthig ist, um Punkte dieser Linien genauer kennen zu lernen, als sie aus der Auflösung der *erleichterten* Aufgaben hervorgehen, nicht durch ihren *Nutzen* gerechtfertigt werden kann; also auch, dass ein Versuch ihrer, den gegebenen Elementen einer Finsterniss genau angemessenen Bestimmung, nur durch das mathematische Interesse der Aufgabe selbst hervorgerufen werden darf. Dieses Interesse aber kann durch eine Anwendung der *allgemeinen* Methode, eine anfängliche Näherung nach und nach zu verbesseren, nicht befriedigt werden; welche Anwendung ihre Belohnung immer nur in ihrem Resultate findet; in dem gegenwärtigen Falle also in einem Resultate, dessen Werth wenigstens zweifelhaft ist.

Ich habe *streng richtige* und *directe* Auflösungen der Aufgaben gesucht, welche den ganzen Hergang der Finsternisse betreffen. Der *zweite Abschnitt* der Abhandlung verfolgt die Absicht, die Punkte der Erde zu finden, wo die Ränderberührung zweier Gestirne *zu einer gegebenen Zeit des ersten Meridians* wahrgenommen wird; so wie auch diejenigen dieser Punkte auszuzeichnen, welche den Grenzen des Raumes angehören, wo die Finsterniss sichtbar wird; und endlich die Grenzen der Zeit, sowohl ihrer Sichtbarkeit, als auch des Stattfindens besonderer Verhältnisse derselben, zu bestimmen. — Indem die Ausdrücke der Örter der in Betracht kommenden Gestirne transcendente Fuuctionen der Zeit sind, können gesuchte Zeiten nur durch transcendente Gleichungen bestimmt werden: die Analyse der Aufgabe muss diese Gleichungen rein darstellen und die etwa vorhandenen, ihre Auflösung leitenden Eigenschaften geltend machen. Punkte der Curve auf der Erde, auf welcher die Ränderberührung zu gegebener Zeit sichtbar ist, werden durch eine quadratische Gleichung bestimmt. Der Raum wo eine Finsterniss sichtbar wird, wird durch zwei verschiedenartige Curven begrenzt, deren eine die Punkte verbindet, wo der Auf- oder Untergang des Berührungspunkts seine Sichtbarkeit aufhören lässt, die andere die

Punkte, wo die Ränderberührung das *Maximum* der Finsterniss ist. Jede dieser Curven kann entweder ganz zusammenhangen, oder aus zwei getrennten Theilen bestehen; im Falle von Durchgängen der unteren Planeten durch die Sonne ist gewöhnlich nur die erste vorhanden. Punkte dieser ersten Curve werden durch eine Gleichung des 4ten Grades bestimmt, welche in der Form hervortritt, deren Zerlegung in zwei Factoren des zweiten Grades ich im ersten Bande dieses Werks, Abhdl. VI §. 10, gegeben habe. Diese Zerlegung, verbunden mit derselben Transformation, durch welche *Gauss* die in seiner berühmten Abhandlung: *Determinatio attractionis &c.* betrachtete astronomische Aufgabe, und *Jacobi* schwierige geometrische Aufgaben, aufgelöset haben, hat die zur vollständigen Bestimmung von Punkten der ersten Curve nöthigen Mittel geliefert. — Gegebenen Zeiten zugehörige Punkte der *zweiten* Curve werden dagegen durch eine Gleichung des 8ten Grades bestimmt, deren Beschaffenheit aber ihre Auflösung leicht genug macht. — Ich habe den zweiten Abschnitt, der schon fast Zweidrittel der ganzen Abhandlung ausfüllt, von welchem aber wohl nur das im 32ten § Enthaltene Anwendung finden wird, nicht noch weiter ausdehnen wollen, und daher nur Aufgaben verfolgt, welche, wenn auch vielleicht nicht die allein interessirenden, doch die sind, deren Auflösung zur Erreichung des beabsichtigten, oben bezeichneten Ziels erforderlich war. — Ausser dem Angeführten enthält dieser Abschnitt noch die Bestimmung der Curve, auf welcher die Finsterniss central gesehen wird.

Die im *dritten Abschnitte* enthaltene Bestimmung der Finsternisse für *gegebene* Punkte der Erde, ist von der Schwierigkeit frei, welche die Excentricität der Erdmeridiane in die Auflösung aller Aufgaben bringt, durch welche Punkte bestimmt werden sollen, wo die Ränderberührung, oder besondere sie begleitende Umstände, sichtbar werden; sie fordert aber die Auflösung einer transcendenten Gleichung, welche hier durch ein schnell convergirendes Verfahren erlangt wird. In der Anwendung verlangt man weit weniger; nämlich nur eine ohngefähre Vorausbestimmung der Zeiten und Örter des Anfanges und Endes einer Finsterniss, deren Genauigkeit zureichend ist, die Aufmerksamkeit jedes Beobachters, wo er sich auch befinden mag, gehörig zu leiten. Die hierzu hinreichende geringe Annäherung kann durch eine kurze, mit vier Decimalstellen der Logarithmen zu führende Rechnung erlangt

werden, vorausgesetzt dass die Ephemeriden, für jede Finsterniss, einige, in den Rechnungen für alle Beobachtungsörter Anwendung findende Zahlen angeben. Seit der ersten Bekanntmachung dieses früher entbehrten, das Gelingen der Beobachtungen befördernden Hülfsmittels, theilt Herr Prof. *Encke* die Zahlen, welche es voraussetzt, für alle vorkommenden Bedeckungen der Sonne, der Planeten und der Fixsterne, im astronomischen Jahrbuche mit.

Der *vierte Abschnitt* handelt von der Anwendung der Beobachtungen der Finsternisse; von einem Gegenstande, dessen Wichtigkeit für die practische Astronomie die besondere Vorliebe rechtfertigt, welche er immer auf sich gezogen hat. Die zahlreichen Rechnungen, welche ausgeführt worden sind, um durch Beobachtungen der Sonnenfinsternisse, Sternbedeckungen und Durchgänge der unteren Planeten durch die Sonne, die Mittagsunterschiede der Beobachtungsörter zu bestimmen, sind, vielleicht mit einzelnen Ausnahmen, einer Methode gefolgt, welche dem sich dem Beobachter zeigenden Hergange der Erscheinung ganz getreu bleibt. Sie setzt die wahren Örter der Gestirne, so wie die Tafeln oder Ephemeriden sie für die auf den ersten Meridian bezogene Beobachtungszeit ergeben, als bekannt voraus; dann bestimmt sie durch Rechnung ihre scheinbaren Halbmesser, ihre scheinbaren Entfernungen vom Pole und ihre im Sinne des Winkels am Pole stattfindenden Parallaxen; ferner sucht sie, in dem sphärischen Dreiecke zwischen dem Pole und den Mittelpunkten der beiden Gestirne, dessen Seiten schon bekannt geworden sind, den Winkel am Pole, der, durch Hinzufügung des Einflusses der Parallaxen auf ihn, in den ähnlichen geocentrischen Winkel verwandelt wird; dieser, verbunden mit der aus den Tafeln der Ephemeriden entlehnten Geschwindigkeit seiner Änderung, führt zur Kenntniss der Zwischenzeit zwischen den Momenten der Beobachtung und der Zusammenkunft beider Gestirne, und dadurch zu dem, sich auf den Meridian des Beobachtungsorts beziehenden Ausdrucke des letzteren Moments. — Diese Methode ist von *Lalande* *), und vollständiger und einfacher von *Bohnenberger* **) entwickelt worden, welche Beide für den erwähnten Pol den der Ecliptik annehmen und also unter der Zeit

*) Astronomie. 3. Edition §. 1970 &c.

**) Geogr. Ortsbestimmungen. Göttingen 1795. S. 323 &c.

der Zusammenkunft die Zeit verstehen, wenn beide Gestirne gleiche Länge haben; *Gerstner* hat die Rechnungsvorschriften auf den Pol des Aequators bezogen, also auch die Zeit wenn beide Gestirne gleiche Geradeaufsteigung haben, als Zusammenkunftszeit angesehen *). *Carlini* aber hat diese Methode, für den Fall ihrer Anwendung auf Fixsternenbedeckungen, wesentlich verbessert **), indem er vorschreibt, die Parallaxen nicht für den wahren Ort des Mittelpunkts des Mondes, sondern für den scheinbaren Ort wo der Stern seinen Rand berührt, d. h. für den Ort des Sterns selbst, zu berechnen. Durch diese Vorschrift wird die Aufsuchung des scheinbaren Halbmessers und der wahren Länge des Mondes vermieden. — Vielfältige vorhandene Bemühungen, die Formeln, welche die Wirkungen der Parallaxe ausdrücken, geschmeidiger zu machen, müssen auch zu den durch diese Methode veranlassten gezählt werden.

Die eben beschriebene Rechnungsart hat die Unvollkommenheit, dass sie Länge, Breite und Horizontalparallaxe der Gestirne, für die der Beobachtungszeit entsprechende Zeit des ersten Meridians verlangt, während diese doch erst *nach* der Bestimmung des durch die Beobachtung gesuchten Mittagsunterschiedes bekannt wird. Sie würde nur das wahre Resultat einer Beobachtung ergeben, wenn die Einflüsse eines Fehlers des als näherungsweise bekannt angenommenen Mittagsunterschiedes auf alles von ihm Abhängige, bis zum Ende der Rechnung verfolgt würden, was aber, zumal ohne die von *Carlini* verlangte Verbesserung, die Rechnung nicht unbeträchtlich vermehren würde. Ferner hat sie die Unvollkommenheit, dass sie, wenn *beide* Gestirne Parallaxen haben, entweder doppelte Rechnung, oder eine, wenn auch nicht grosse, Vernachlässigung fordert. Endlich sind die Einflüsse unbestimmter, kleiner Änderungen der der Rechnung zum Grunde gelegten Elemente nicht vollständig entwickelt worden.

Weit grössere Ansprüche auf Anwendung als diese Methode, hätte die von *Lagrange* entwickelte gehabt ***), für deren, nichts destoweniger stattgefundene Vernachlässigung man vergebens einen haltbaren Grund

*) Berliner Astr. Jahrb. für 1798. S. 128.

**) *v. Zach*, Monatl. Corresp. B. XVIII. S. 528.

***) Berliner Astr. Jahrb. für 1782. S. 46 &c.

suchen würde. Sie geht von der, nur geocentrische Data enthaltenden, die Ränderberührung bedingenden Gleichung aus, und leitet daraus eine *directe* Auflösung der Aufgabe her. *Lagrange* selbst entwickelt sie so, dass die Zeit der gleichen Länge der beiden Gestirne als ihre unbekannte Grösse erscheint. Der scharfsinnige *Claussen* ist, so viel ich weiss, der Erste, welcher die Vorzüge einer ähnlichen Ansicht der Aufgabe gewürdigt und darüber einen Aufsatz, in welchem er die Zeit der kleinsten geocentrischen Entfernung zur unbekannten Grösse macht, geschrieben hat *). Diese Ansicht habe auch ich, im vierten Abschnitte der Abhandlung, verfolgt. Ich bin von der Gleichung ausgegangen, welche die Bedingung der Ränderberührung ausdrückt; von derselben, von welcher alle in dieser Abhandlung gegebenen Auflösungen ausgehen. Diese Gleichung hat den wesentlichen Vorzug, dass sie die Coordinaten des entfernteren Gestirns, nachdem sein Einfluss auf die Elemente der Finsterniss übertragen worden ist, nicht enthält; wovon die Folge ist, dass der zusammengesetztere Fall, in welchem beide Gestirne Halbmesser und Parallaxen zeigen, bis auf einen hier wenig hervortretenden Unterschied, sich auf den einfachern reducirt, in welchem das eine ein Fixstern ist; so dass Beobachtungen von Finsternissen *beider* Fälle, nach der dem letzteren angemessenen Vorschrift berechnet werden können, ohne dass durch diese Zusammenziehung beider Gestirne etwas von der vollkommenen Genauigkeit der Grundgleichung verloren wird. Ich habe den Mittagsunterschied des Beobachtungsorts zur unbekannten Grösse gemacht und die Auflösung der Gleichung so entwickelt, dass sie selbst die Reduction der Beobachtung von Sternenzeit auf Sonnenzeit, oder umgekehrt, nicht fordert und also auch dazu den Mitagsunterschied nicht als bekannt voraussetzt. Die Einflüsse unbestimmter, kleiner Änderungen der Rechnungselemente habe ich leicht vollständig, und in den Verbindungen in welchen sie sich bei einer Finsterniss äussern, angeben können.

Die Finsternisse sind immer als Erscheinungen angesehen, welche keinen Einfluss der Strahlenbrechung erfahren. *Hansen* hat aber bemerkt, dass sie von diesem Einflusse wirklich nicht frei sind, obgleich er meistens

*) Astron. Nachrichten. Nro. 40.

sehr klein ist*); welches letztere jedoch das Interesse der Bemerkung nicht vermindert. Jeder zum Auge gelangende Strahl würde, ohne seine Brechung, über ihm fortgehen und die Lothlinie da schneiden, wo die Asymptote an seine krumme Bahn sie wirklich durchschneidet; die an einem Punkte der Erde sichtbare Ränderberührung ist also die jenem Punkte zugehörige, wesshalb die Befreiung ihrer Beobachtung von dem Einflusse der Strahlenbrechung, durch die Versetzung des Beobachtungsorts an jenen Punkt erlangt wird. Wenn der Beobachtungsort selbst über der Oberfläche des Rotationssphäroids liegt, welche für die der Erde angenommen worden ist, so kommt seine Erhöhung offenbar zu der von der Strahlenbrechung erzeugten hinzu; dass ihr Einfluss, in genau geführten Rechnungen nicht immer unbeachtet bleiben darf, hat, so viel ich weiss, zuerst Herr Prof. *Gerling* erinnert **).

Auf welche Art die Berechnung von Beobachtungen der Finsternisse, die Strahlenbrechung und die eigene Erhöhung des Beobachtungsorts berücksichtigen muss, findet man am Ende des vierten Abschnittes angeführt. Die den Hergang einer Finsterniss auf der Erde im Allgemeinen betreffenden, im zweiten Abschnitte aufgelöseten Aufgaben, können keine Rücksicht auf die eigenen Erhöhungen der Punkte der physischen Oberfläche der Erde nehmen, da diese keinem Gesetze folgen; die von der Strahlenbrechung herrührende Erhöhung würden sie aber berücksichtigen können, indem, statt der Coordinaten von Punkten der ellipsoidischen Oberfläche, die angenommen würden, welche den Punkten zugehören, wo die Asymptoten an die, in der Richtung der Axe des Schattenkegels ankommenden Strahlen, die verschiedenen Lothlinien treffen. Diese Punkte werden durch das Gesetz der Strahlenbrechung bestimmt, welches aber viel zu wenig einfach ist um nicht seiner directen Verfolgung unübersteigliche Schwierigkeiten in den Weg zu legen. Die Umgehung dieser Schwierigkeiten durch die indirecte Erlangung von Zahlenresultaten, würde aber, der über den Werth solcher Resultate oben schon gemachten Bemerkung gemäss, keinen Zweck haben; destoweniger, da der Einfluss der Unregelmässigkeiten der Erdoberfläche, welcher meistens

*) Astron. Nachrichten. Nro. 347.

**) Astron. Nachrichten. Nro. 217.

grösser ist als der der Strahlenbrechung, nicht berücksichtigt werden kann, auch die Abhängigkeit des letzteren von den (unbekannten) Ständen des Barometers und Thermometers unbeachtet bleiben muss. Ich habe daher die kleinen Einflüsse der Strahlenbrechung *nur* im vierten Abschnitte berücksichtigt.

Über die ganze Abhandlung bemerke ich noch, dass ich alle Vorschriften der drei ersten Abschnitte in einem durchgehenden Beispiele angewandt habe, welches ich jedoch in dem vierten entbehren zu können glaubte. Hierdurch und durch Erläuterungen der Eigenthümlichkeiten verschiedener Fälle von Finsternissen, ist die Abhandlung weit über den Raum hinaus angewachsen, welcher erforderlich gewesen sein würde, den Gang der darin verfolgten mathematischen Betrachtungen darzustellen. Wenn ich noch grössere Ausdehnung nicht hätte vermeiden wollen, so würde ich mich noch auf die *besondere* Betrachtung zweier Fälle eingelassen haben, in welchen das Verhältniss der Grösse der Erde zu der sie treffenden Ausdehnung des Schattenkegels, von dem bei den übrigen Arten von Finsternissen stattfindenden so beträchtlich verschieden ist, dass es der Mühe werth gewesen sein würde, diese Verschiedenheiten geltend zu machen. Der eine dieser Fälle wird durch die Durchgänge der unteren Planeten durch die Sonne, der andere durch die inneren Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes dargeboten: in jenem Falle ist die Grösse der Erde, vergleichungsweise mit der sie treffenden Ausdehnung des Schattenkegels, *sehr klein*, in diesem *sehr gross*, aus welchen Verhältnissen, so wie immer aus ähnlichen, Nutzen gezogen werden kann.

Erster Abschnitt.

Grundgleichung der Analyse der Finsternisse.

1.

Die Ränder zweier Gestirne werden in Berührung gesehen, wenn das Auge sich in der einen, oder der anderen der beiden Oberflächen befindet, welche beide Gestirne einhüllen. Eine dieser Oberflächen verengt sich zwischen beiden Gestirnen, die andere (insofern eins derselben

in jeder Richtung kleiner ist als das andere) über das kleinere hinaus. Befindet das Auge sich in der ersteren, so sieht es die *äussere* Berührung der Ränder, in der anderen die *innere*. Die Richtung, in welcher der Berührungspunkt der Ränder erscheint, ist die Richtung der geraden, von dem Auge aus, in der einhüllenden Oberfläche, den Gestirnen zu gezogenen Linie. — Die Grundgleichung der Analyse aller Aufgaben, welche die Ränderberührung zweier Gestirne veranlassen kann, ist daher nichts Anderes als der Ausdruck der Bedingung, dass das Auge sich in der einen, oder der anderen der einhüllenden Oberflächen befinde.

Die Analyse der Gleichung der beiden Oberflächen, welche zwei Körper von beliebiger Form einhüllen, ist bekannt; unter Anderen entwickelt sie *Laplace* im 4ten Bande der *Mecanique Céleste* (Liv. VIII. Chap. VII). Hier soll aber nur der einfachste Fall verfolgt werden, der Fall in welchem beide Gestirne *Kugeln*, die sie einhüllenden Oberflächen also gerade Kegel sind, deren Spitzen in der ihre Mittelpunkte verbindenden geraden Linie liegen. Das Folgende wird daher unmittelbare Anwendung finden, wenn Gestirne in Betracht kommen, welche keine bekannte Abweichung von der Kugelgestalt besitzen, wie dieses der Fall des Mondes, der Fixsterne, der Sonne und, mit Ausnahme des Jupiter und Saturn, der Planeten ist. Die Ränderberührungen jedes Paars dieser Gestirne können nach den Vorschriften, welche ich entwickeln werde, untersucht werden.

Die Grundgleichung der Analyse der Finsternisse zweier kugelförmigen Gestirne erhält ihre einfachste Gestalt, wenn sie auf ein System, sich im Mittelpunkte der Erde rechtwinklicht durchschneidender Axen bezogen wird, deren eine der geraden Linie parallel ist, welche die Mittelpunkte beider Gestirne miteinander verbindet. Diese Axe trifft die Himmelskugel an einem Punkte Z, an welchem der Mittelpunkt des entfernteren Gestirns von dem Mittelpunkte des näheren gesehen wird, und dessen Geradeaufsteigung und Abweichung ich durch a und d bezeichnen werde. Die zweite Axe werde ich so legen, dass sie die Himmelskugel an einem Punkte Y trifft, welcher im Declinationskreise von Z, 90° nördlich entfernt von diesem Punkte, in der Geradenaufsteigung a und Abweichung $d+90°$ liegt. Die dritte Axe soll einen Punkt X der Himmelskugel treffen, welcher sowohl von Z, als auch von Y einen

Quadranten entfernt ist, dessen Geradeaufsteigung $a+90^\circ$ ist und dessen Abweichung verschwindet. Bezeichnet man die auf diese Axen bezogenen Coordinaten des näheren Gestirns durch z, y, x, des entfernteren durch z', y', x', so hat die getroffene Wahl der ersten Axe zur Folge, dass die Entfernung des einen Gestirns von dem anderen, welche ich durch G bezeichnen werde, der Unterschied der Coordinaten z und z' ist und dass $y=y'$ und $x=x'$ sind. Man hat also:

$$\left.\begin{aligned} z'-z &= G \\ y'-y &= 0 \\ x'-x &= 0 \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

Indem die erste Axe jeder, durch die Mittelpunkte der beiden Gestirne gelegten Ebene parallel ist, erscheinen diese und auch die Spitze des Schattenkegels, von welchem Punkte des Raumes sie auch gesehen werden mögen, in einem durch den Punkt Z gehenden grössten Kreise der Himmelskugel. Der Mittelpunkt des entfernteren Gestirns erscheint immer dem Punkte Z am nächsten; dann folgt, bei äusseren Berührungen der Ränder, die Spitze des Kegels und endlich der Mittelpunkt des näheren Gestirns; bei inneren Berührungen erscheinen die beiden letzteren in umgekehrter Ordnung. Der Winkel zwischen dem grössten Kreise, auf welchem diese Punkte erscheinen und dem Declinationskreise ZY ist der gemeinschaftliche *Positionswinkel* beider Gestirne am Punkte Z; ich werde ihn durch p bezeichnen. Wenn man die Entfernung vom Punkte Z, in welcher die Spitze des Schattenkegels erscheint, durch f, die Entfernung dieser Spitze vom Auge durch Δ bezeichnet, so sind die Projectionen der letzteren auf die drei Axen:

$$\Delta \cos f,\ \Delta \sin f \cos p,\ \Delta \sin f \sin p,$$

welche Projectionen auch die Unterschiede der Coordinaten der Spitze des Kegels und des Auges sind. Man hat also, wenn man die ersteren durch s und die schon dafür geschriebenen y, x, die letzteren durch ζ, η, ξ bezeichnet, die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Delta \cos f &= s-\zeta \\ \Delta \sin f \cos p &= y-\eta \\ \Delta \sin f \sin p &= x-\xi \end{aligned}$$

oder, nach der Elimination von Δ:

$$\left.\begin{aligned}(s-\zeta)\,\mathrm{tang} f\cos p &= y-\eta\\(s-\zeta)\,\mathrm{tang} f\sin p &= x-\xi\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Hierdurch wird der Punkt der Himmelskugel bestimmt, wo die Spitze des Schattenkegels erscheint. Wenn eine Ränderberührung stattfindet, erscheint sie entweder an demselben Punkte, oder an dem ihm gerade entgegengesetzten; das erstere offenbar, wenn die Spitze des Schattenkegels in der Richtung von dem Auge nach den Gestirnen, das letztere wenn sie in der entgegengesetzten liegt; jenes also wenn die Ränderberührung eine äussere und eine sich bei ringförmigen Finsternissen ereignende innere, dieses wenn sie eine sich bei gänzlichen Finsternissen ereignende innere ist. Eine Ränderberührung findet daher statt, wenn f dem den Kegel erzeugenden Winkel gleich ist, welcher Winkel in dem ersten Falle spitz, in dem zweiten stumpf angenommen wird; oder ihre Bedingung ist, dass f den Gleichungen entspreche, welche zwischen den Halbmessern k und k' der beiden kugelförmigen Gestirne, ihren Entfernungen voneinander und von der Spitze des Schattenkegels, und dem diesen Kegel erzeugenden Winkel stattfinden.

Diese Gleichungen sind, für äussere Berührungen, für welche $s > z$ und $< z'$ ist:

$$(s-z)\sin f = k;\quad (z'-s)\sin f = k'$$

und für innere Berührungen, für welche $s < z$ und $< z'$ ist:

$$(z-s)\sin f = k;\quad (z'-s)\sin f = k'$$

und es folgen daraus

$$\left.\begin{aligned}s &= \frac{k'z \pm kz'}{k' \pm k}\\ \sin f &= \frac{k' \pm k}{z'-z} = \frac{k' \pm k}{G}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

wo das obere Zeichen den äusseren, das untere den inneren Ränderberührungen zugehört. Wenn s und f diesen Ausdrücken gemäss in den Gleichungen (2) angenommen werden, so werden also diese die Bedingungsgleichungen der Ränderberührung. Der darin vorkommende Positionswinkel p der beiden sich berührenden Gestirne ist entweder auch der Positionswinkel des Berührungspunktes ihrer Ränder, oder 180° davon verschieden; das erstere oder das letztere, jenachdem der Winkel f spitz oder stumpf angenommen werden muss, also jenachdem die Ränder-

berührung eine äussere und eine sich bei einer ringförmigen Finsterniss ereignende innere, oder eine sich bei einer gänzlichen Finsterniss ereignende innere ist. Will man f immer spitz annehmen, so muss man den Gleichungen (2) die Vorschrift hinzusetzen, dass in dem Falle einer inneren Berührung bei einer gänzlichen Finsterniss, unter p nicht der Positionswinkel des Berührungspunkts der Ränder an dem Punkte Z, sondern der um 180° davon verschiedene verstanden werde.

Diese Gleichungen sind die Grundgleichungen der Analyse aller Aufgaben, welche durch die Berührungen der Ränder zweier kugelförmigen Gestirne veranlasst werden können. Das Folgende wird zeigen, wie einfach, vergleichungsweise mit früheren Untersuchungen über denselben Gegenstand, diese Analyse wird, indem man sie von der einfachsten Gestalt der Grundgleichungen ausgehen lässt. Die Einführung des Punktes Z in die Betrachtung, von welcher die Gleichungen (2) die Folge sind, erscheint daher als ein wesentlicher der Schritte, welche zur Vereinfachung der Theorie der Finsternisse nothwendig waren.

2.

Ich werde die im vorigen § vorkommenden Grössen durch solche ausdrücken, welche entweder aus den astronomischen Tafeln oder Ephemeriden entnommen, oder als anderweitig bekannt geworden angesehen werden können.

Die in den Gleichungen (2) vorausgesetzte Lage der Coordinatenaxen, oder die Bestimmung von a und d, wovon sie abhängt, erhält man durch die Unterschiede der von beiden Gestirnen auf den Aequator und zwei auf ihn senkrechte Ebenen gefällten Perpendikel. Wenn die Entfernung des näheren Gestirns von dem Mittelpunkte der Erde und seine geocentrische Geradeaufsteigung und Abweichung durch r, α, δ bezeichnet, und r', α', δ' in ähnlicher Bedeutung für das entferntere angewandt werden, hat man nämlich:

$$G \cos d \cos a = r' \cos\delta' \cos\alpha' - r \cos\delta \cos\alpha$$
$$G \cos d \sin a = r' \cos\delta' \sin\alpha' - r \cos\delta \sin\alpha$$
$$G \sin d = r' \sin\delta' - r \sin\delta$$

oder, bequemer für die Rechnung ausgedrückt:

$$\left.\begin{aligned} g\cos d\cos(a-\alpha') &= \cos\delta' - m\cos\delta\cos(\alpha-\alpha') \\ g\cos d\sin(a-\alpha') &= - m\cos\delta\sin(\alpha-\alpha') \\ g\sin d &= \sin\delta' - m\sin\delta \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

in welchen Formeln $r'g$ für G und $r'm$ für r geschrieben sind.

Nachdem die zur Bestimmung der Punkte Z, Y, X der Himmelskugel oder zur Bestimmung der Lage der Coordinatenaxen, erforderlichen a und d hierdurch gefunden sind, kann man die Cosinusse der Entfernungen, sowohl des näheren, als auch des entfernteren Gestirns von Z, Y, X, und damit die Coordinaten, folgendermassen ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} z &= r\left\{\sin d\sin\delta + \cos d\cos\delta\cos(\alpha-a)\right\} \\ y &= r\left\{\cos d\sin\delta - \sin d\cos\delta\cos(\alpha-a)\right\} \\ x &= r\cos\delta\sin(\alpha-a) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\left.\begin{aligned} z' &= r'\left\{\sin d\sin\delta' + \cos d\cos\delta'\cos(\alpha'-a)\right\} \\ y' &= r'\left\{\cos d\sin\delta' - \sin d\cos\delta'\cos(\alpha'-a)\right\} \\ x' &= r'\cos\delta'\sin(\alpha'-a) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Ähnliche Formeln, in welchen statt r, δ, α, die Entfernung des Auges von dem Mittelpunkte der Erde ϱ, seine geocentrische Abweichung, oder die sogenannte verbesserte Polhöhe φ', und seine Geradeaufsteigung, oder die in Theilen des Kreises ausgedrückte Sternenzeit μ geschrieben werden, drücken auch ζ, η, ξ aus, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= \varrho\left\{\sin d\sin\varphi' + \cos d\cos\varphi'\cos(\mu-a)\right\} \\ \eta &= \varrho\left\{\cos d\sin\varphi' - \sin d\cos\varphi'\cos(\mu-a)\right\} \\ \xi &= \varrho\cos\varphi'\sin(\mu-a) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Indem $z'=z+G$, $y'=y$, $x'=x$ sind und G schon durch die Formeln (4) bekannt geworden ist, ist es unnöthig, die Formeln (6) anzuwenden wenn (5) schon angewandt worden sind, oder umgekehrt.

Die zweite der Formeln (5) (oder (6)) bedarf, vor der Anwendung, noch einer Abänderung, durch welche sie aufhört y durch den Unterschied zweier weit grösseren Quantitäten zu ergeben; schreibt man dafür

$$y = r\left\{\sin(\delta-d)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-a)^2 + \sin(\delta+d)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-a)^2\right\}$$

so besitzt sie diese Unbequemlichkeit nicht mehr. Die erste Formel kann, auf ähnliche Art, nämlich in:

$$z = r\left\{\cos(\delta - d)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - a)^2 - \cos(\delta + d)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - a)^2\right\}$$

verändert werden.

Obgleich man Umformungen von Ausdrücken, welche den Zweck haben, diese zur logarithmischen Berechnung geschickt zu machen, lieber selbst hinzufügen, als die Ausdehnung dieser Abhandlung durch ihre jedesmalige Anführung vermehrt sehen wird, und obgleich ich daher dergleichen Umformungen, so wie auch der Anführung jedes Mittels die Berechnung einer Formel zu erleichtern, keinen Platz einzuräumen beabsichtige, so glaube ich doch, eine zweite Art, zur Kenntniss von g, a, d, z, y, x zu gelangen, hier mittheilen zu müssen. Sie setzt voraus, dass man die Entfernung der geocentrischen Örter beider Gestirne an der Himmelskugel voneinander $=\gamma$, und den Positionswinkel, entweder des näheren am entfernteren $=\omega'$, oder des entfernteren am näheren $=180^\circ+\omega$, aus α, δ, α', δ' ableite, was nach den Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}(\omega+\omega') &= \cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\\
\sin\tfrac{1}{2}\gamma\sin\tfrac{1}{2}(\omega+\omega') &= \sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\\
\cos\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}(\omega-\omega') &= \cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\\
\cos\tfrac{1}{2}\gamma\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega') &= \sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

geschieht. In dem Dreiecke zwischen dem Mittelpunkte der Erde und beiden Gestirnen ist der Winkel am Mittelpunkte der Erde $=\gamma$, und wenn man die geoc. Entfernung des entfernteren Gestirns vom Punkte Z der Himmelskugel durch c bezeichnet, der Winkel am entfernteren Gestirne $=c$, am näheren $=180^\circ-\gamma-c$. Man hat also

$$\left.\begin{aligned}
g\cos c &= 1 - m\cos\gamma\\
g\sin c &= m\sin\gamma
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

oder auch

$$\left.\begin{aligned}
g\cos(c+\tfrac{1}{2}\gamma) &= (1-m)\cos\tfrac{1}{2}\gamma\\
g\sin(c+\tfrac{1}{2}\gamma) &= (1+m)\sin\tfrac{1}{2}\gamma
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9^*)$$

wodurch man g und c, und dann a, d und den gemeinschaftlichen Positionswinkel beider Gestirne (w) am Punkte Z, durch die Formeln

$$\left.\begin{aligned}
\cos(45^\circ+\tfrac{1}{2}d)\sin\tfrac{1}{2}(w+a-\alpha') &= \sin\tfrac{1}{2}\omega'\cos\left(45^\circ+\frac{\delta'+c}{2}\right)\\
\cos(45^\circ+\tfrac{1}{2}d)\cos\tfrac{1}{2}(w+a-\alpha') &= \cos\tfrac{1}{2}\omega'\cos\left(45^\circ+\frac{\delta'-c}{2}\right)\\
\sin(45^\circ+\tfrac{1}{2}d)\sin\tfrac{1}{2}(w-a+\alpha') &= \sin\tfrac{1}{2}\omega'\sin\left(45^\circ+\frac{\delta'+c}{2}\right)\\
\sin(45^\circ+\tfrac{1}{2}d)\cos\tfrac{1}{2}(w-a+\alpha') &= \cos\tfrac{1}{2}\omega'\sin\left(45^\circ+\frac{\delta'-c}{2}\right)
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots (10)$$

findet. Durch r, $c+\gamma$, w ausgedrückt, sind:

$$\left.\begin{array}{l} z = r\cos(c+\gamma) \\ y = r\sin(c+\gamma)\cos w \\ x = r\sin(c+\gamma)\sin w \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

In dem Falle der Bedeckung eines Fixsterns sind w, a, d resp. $= \omega'$, α', δ', und c verschwindet, wesshalb in diesem Falle nur die Formeln (8), und statt (11)

$$\left.\begin{array}{l} z = r\cos\gamma \\ y = r\sin\gamma\cos\omega' \\ x = r\sin\gamma\sin\omega' \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11^*)$$

anzuwenden sind.

3.

Die Einheit, woduch r, r', ϱ, k, k' gemessen werden, ist willkürlich; allein es ist bequem, jede dieser Grössen so ausgedrückt, wie ihre gewöhnliche Angabe in den Tafeln oder Ephemeriden voraussetzt, in die Rechnung zu bringen. Wählt man den Aequatorealhalbmesser der Erde zur Einheit, so sind also die durch dieses Maass gemessenen r, r', k, k' durch die Angaben, welche die Tafeln oder Ephemeriden dafür enthalten auszudrücken.

Wenn der *Mond* das nähere Gestirn ist und seine Aequatoreal-Horizontalparallaxe durch π bezeichnet wird; die *Sonne* das entferntere und ihre Entfernung r' von der Erde durch das allgemeine Maass des Planetensystems, nämlich den mittleren Werth dieser Entfernung, ausgedrückt ist, welchem die Aequatoreal-Horizontalparallaxe Π entspricht, so ist statt r und r' der obigen Formeln:

$$\frac{1}{\sin\pi} \text{ und } \frac{r'}{\sin\Pi}$$

anzunehmen. Der in Theilen des Aequatorealhalbmessers der Erde ausgedrückte Halbmesser des Mondes kann als unmittelbar gegeben angenommen werden; und wenn unter H der Halbmesser, in welchem die Sonnenscheibe in der Entfernung $r'=1$ erscheint, verstanden wird, so ist das in den obigen Formeln vorkommende

$$k' = \frac{\sin H}{\sin\Pi}$$

Man hat also für *Sonnenfinsternisse* die Ausdrücke von:

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{1}{\sin\pi} \\ m &= \frac{\sin\Pi}{r'\sin\pi} \\ \sin f &= \frac{1}{r'g}\left[\sin H \pm k\sin\Pi\right] \\ s\tang f &= z\tang f \pm k\sec f \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (12)$$

anzuwenden. Der Zähler des Ausdruckes von m und der zwischen Klammern eingeschlossene Theil des Ausdruckes von $\sin f$ sind von den Umständen jeder einzelnen Sonnenfinsterniss unabhängig und können daher für alle Erscheinungen dieser Art einfürallemal berechnet werden. Nimmt man z. B. $\Pi = 8'',5776$ nach der erneuerten Berechnung der Beobachtungen der beiden letzten Durchgänge der Venus durch die Sonne von *Encke*; $k = 0,2725$ nach *Burckhardts* Bestimmung; $H = 959'',788$ nach einigen, in *Schumachers Astr. Nachr.* № 228 bekanntgemachten Messungen von mir, so erhält man:

$$\log\sin\Pi = 5,6189407$$

$$\left.\begin{aligned} \log[\sin H + k\sin\Pi] &= 7,6688050 \ldots\ldots \text{ für äussere} \\ \log[\sin H - k\sin\Pi] &= 7,6666896 \ldots\ldots \text{ ,, innere} \end{aligned}\right\} \text{Berührungen.}$$

Für Bedeckungen der Planeten durch den Mond hat man ähnliche Ausdrücke, in welchen aber r' die Entfernung des Planeten von der Erde und H den Halbmesser seiner, in der Entfernung $= 1$ gesehenen Scheibe bedeuten. — Für Bedeckungen der Fixsterne fallen äussere und innere Berührungen zusammen; a und d sind die Geradeaufsteigung und Abweichung des bedeckten Fixsterns selbst; m und f verschwinden und statt $(s-\zeta)\tang f$ wird, in den Gleichungen (2), die beständige Grösse k angewandt. — Das Product $s\tang f$ ist der Halbmesser des Kreises, welchen der Schattenkegel auf der Ebene ausschneidet, welche senkrecht auf der Axe der z, durch den Mittelpunkt der Erde geht; es wird in der Folge durch l bezeichnet werden.

Für Durchgänge der unteren Planeten durch die Sonne sind r und r', in dem allgemein gebräuchlichen Maasse des Planetensystems ausgedrückt, als gegeben anzusehen; wenn h den in der Entfernung $= 1$ gesehenen Halbmesser der Scheibe des Planeten bedeutet, ist

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{r}{\sin \Pi} \\ m &= \frac{r}{r'} \\ \sin f &= \frac{\sin H \pm \sin h}{r'g} \\ s \operatorname{tang} f &= z \operatorname{tang} f \pm \frac{\sin h}{\sin H} \sec f \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

In diesem Falle ist m keine *kleine* Grösse, welches in den vorigen Fällen stattfand; g ist daher auch nicht, wie vorher, näherungsweise $=1$, sondern näherungsweise $=1-m$; der Punkt Z der Himmelskugel ist der dem heliocentrischen Orte des durch die Sonne gehenden Planeten gerade entgegengesetzte. — In allen Fällen wird durch die Einführung des Punkts Z der Himmelskugel in die Betrachtung erlangt, dass man den Ort des verfinsterten Gestirns nicht weiter gebraucht, als zur Berechnung der Formeln (4).

4.

Ich werde die Anwendung der Vorschriften, welche man in dieser Abhandlung finden wird, durch ein danach berechnetes Beispiel anschaulich machen und wähle dazu die *Sonnenfinsterniss*, welche am 15. May 1836 vorfiel. Die Örter des Mondes und der Sonne habe ich aus den sich in dem *Berliner Astronomischen Jahrbuche* von *Encke* findenden Angaben abgeleitet, nämlich aus folgenden:

A. R. ☽

	M. Z. Berlin.						
May 14	0^h	38° 57′ 12″,8	5° 50′ 3″,6	+ 6′ 18″,8	+ 36″,6	− 19″,3	− 4″,6
	12	44 47 16,4	56 22,4	6 55,2	+ 17,3	− 23,9	
15	0	50 43 38,8	6 3 17,6	7 12,5	− 6,6		
	12	56 46 56,4	10 30,1	7 5,9			
16	0	62 57 26,5	17 36,0				
	12	69 15 2,5					

Decl. ☽

May 14	0^h	+14° 23′ 42″,4	+2° 19′ 39″,7	−10′ 44″,6	−1′ 24″,7	+ 2″,4	+ 2″,9
	12	16 43 22,1	2 8 55,1	−12 9,3	−1 22,3	+ 5,3	
15	0	18 52 17,2	1 56 45,8	−13 31,6	−1 17,0		
	12	20 49 3,0	1 43 14,2	−14 48,6			
16	0	22 32 17,2	1 28 25,6				
	12	24 0 42,8					

Parallaxe ☽

May 14	0^h	54′ 45″,1			
	12	54 35,2	− 9″,9	+ 0″,9	
15	0	54 26,2	− 9,0	+ 1,1	+ 0″,2
	12	54 18,3	− 7,9	+ 1,2	+ 0,1
16	0	54 11,6	− 6,7	+ 1,2	0,0
	12	54 6,1	− 5,5		

A. R. ☉

May 14	− 3′ 56″,30	51° 13′ 55″,65	+ 59′ 11″,70	+ 8″,55	− 0″,15
15	− 3 56,08	52 13 7,35	59 20,25	+ 8,40	
16	− 3 55,28	53 12 27,60	59 28,65		
17	− 3 53,93	54 11 56,25			

Decl. ☉

May 14	− 3′ 56″,30	+ 18° 41′ 46″,4	+ 14′ 15″,7	− 19″,2	− 0″,3
15	− 3 56,08	18 56 2,1	13 56,5	− 19,5	
16	− 3 55,28	19 9 58,6	13 37,0		
17	− 3 53,93	19 23 35,6			

Log. Entfernung ☉

May 14	0^h	0,0049311	+ 895	− 20
15	0	50206	+ 875	− 20
16	0	51081	+ 855	
17	0	51936		

Die Zeit, während welcher die äussere Berührung der Ränder der Sonne und des Mondes irgendwo auf der Erde sichtbar war, dauerte etwa 6 Stunden, deren Mitte auf etwa $2^u\,11'$ M.Z. des Pariser Meridians fällt, von welchem der Meridian, für dessen Zeit die angewandte Ephemeride berechnet ist, $11°\,3'\,30'' = 44'\,14''$ Zeit östlich angenommen ist. Da es nun bequem ist, die Werthe der verschiedenen, von der Zeit abhängigen Grössen, deren Kenntniss die Theorie der Finsternisse voraussetzt, während der Dauer der gegenwärtigen Finsterniss, für weniger voneinander entfernte Zeiten, als die in der Ephemeride enthaltenen, kennen zu lernen, so werde ich zuerst aus dieser eine andere ableiten, welche von Stunde zu Stunde fortschreitet und die Örter des Mondes und der Sonne für 0^u, 1^u, ... 6^u mittlere Berliner Zeit angiebt, welche Zeiten ich $23^u\,15'\,46''$, $0^u\,15'\,46''$ $5^u\,15'\,46''$ des *ersten*

Meridians nennen werde*). Die zu dieser Ausdehnung der *Encke*schen Ephemeride auf kleinere Zwischenzeiten erforderliche Interpolation, wird durch die Anwendung logarithmischer Interpolationstafeln erleichtert, durch deren Berechnung **) Herr Professor *Anger* in Danzig den von mir (Astr. Nachr. № 151. S. 128) geäusserten Wunsch erfüllt hat. Diese Interpolation hat Folgendes ergeben:

Für den Mond.

	Zeit.	A. R.	Decl.	Parallaxe.
May 14	23ᵘ 15′ 46″	50° 43′ 38″,800	18° 52′ 17″,200	54′ 26″,200
15	0 15 46	51 13 39,030	19 2 30,030	25,499
	1 15 46	51 43 42,169	19 12 37,747	24,804
	2 15 46	52 13 48,234	19 22 40,300	24,118
	3 15 46	52 43 57,238	19 32 37,641	23,440
	4 15 46	53 14 9,193	19 42 29,722	22,769
	5 15 46	53 44 24,112	19 52 16,496	22,106

*) Ich erlaube mir, bei dieser Gelegenheit, eine Bemerkung über den *ersten Meridian.* So nenne ich den Meridian von *Paris*, auf den ich alle Zeitangaben beziehe, welche nicht (wie z. B. unmittelbare Beobachtungen) natürliche Beziehung zu einem anderen Orte haben. Ich folge hierin der *Gewohnheit* auf dem festen Lande von Europa; von welcher zwar Ausnahmen vorkommen, aber nicht so entschieden sich zu *einem* anderen Meridiane neigende, dass zweifelhaft würde, welcher von beiden der am allgemeinsten angewandte ist. Man findet Zeitangaben von Erscheinungen, welche keine Beziehung zu einem bestimmten Orte haben, auf die Meridiane von Altona, Berlin, Göttingen, Mayland, Seeberg, Wien und andere bezogen; z. B. die Zeiten, für welche Örter der Himmelskörper, in ihren Theorien, Tafeln oder Ephemeriden angegeben werden. *Nothwendig* ist diese Verschiedenheit offenbar nicht; die allgemeine Anwendung der astronomischen Angaben *erleichternd* ist sie so lange nicht, als nicht die Unterschiede anderer Meridiane von den angeführten unmittelbarer bekannt sein werden, als von dem Pariser. Ich finde nicht, dass dieses bis jetzt der Fall wäre; dass vorhandene Örterverzeichnisse, See- und Landkarten u. s. w. vorzugsweise auf einen der angeführten Meridiane bezogen wären. Dass eine, an sich ganz willkürliche Wahl, sich auf einen bestimmten Meridian gewandt hat, sehe ich als ein *günstiges Ereigniss* an, dessen Vortheil man nicht ohne Grund aufopfern soll. Bekanntlich wird, auf einem anderen grossen Theile der Erde, der Meridian von Greenwich als der *erste* angenommen; dieser Theil würde eine Änderung *seiner Gewohnheit* unbequem finden, wesshalb wenigstens *ich* sie nicht zu rechtfertigen wissen würde. — Dass ich, in dieser Ansicht, nie in Versuchung gewesen sein kann, neben den beiden gebräuchlichen Anfangsmeridianen noch einen dritten, z. B. den von *Königsberg*, zu wünschen, ist einleuchtend: *einer* wäre am besten; zwei sind besser als drei u. s. w.

**) Tafeln zur Erleichterung des Gebrauchs der Mond-Ephemeriden. Halle 1831.

Für die Sonne.

	Zeit.	A. R.	Decl.	log. Entfernung.	Sternenzeit.
May 14	23^{u} 15′ 46″	52° 13′ 17,067″	18° 56′ 4,412″	0,0050206	2^{u} 48′ 35,220″
15	0 15 46	15 45,241	56 39,649	50243	3 48 45,076
	1 15 46	18 13,431	57 14,854	50280	4 48 54,933
	2 15 46	20 41,635	57 50,025	50316	5 49 4,789
	3 15 46	23 9,853	58 25,162	50353	6 49 14,645
	4 15 46	25 38,087	59 0,266	50390	7 49 24,501
	5 15 46	28 6,335	59 35,335	50427	8 49 34,358

Man erhält hieraus, nach den gegebenen Vorschriften:

Zeit.	*a*	*d*	log. *g*
23^{u} 15′ 46″	52° 13′ 31,07″	18° 56′ 4,95″	9,9988714
0 15 46	15 54,94	56 38,71	9,9988710
1 15 46	18 18,82	57 12,44	9,9988706
2 15 46	20 42,71	57 46,14	9,9988704
3 15 46	23 6,62	58 19,81	9,9988702
4 15 46	25 30,54	58 53,45	9,9988701
5 15 46	27 54,47	59 27,06	9,9988701

Ferner die Coordinaten z, y, x:

log. *z*		*y*			*x*		
1,8002674		— 0,063106			— 1,562075		
	1620		173875			480636	
1,8004294		+ 0,110769		—233	— 1,081439		+136
	1328		173642			480772	
1,8005622		+ 0,284411		—247	— 0,600667		+104
	1030		173395			480876	
1,8006652		+ 0,457806		—259	— 0,119791		+ 71
	737		173136			480947	
1,8007389		+ 0,630942		—272	+ 0,361156		+ 38
	444		172864			480985	
1,8007833		+ 0,803806		—284	+ 0,842141		+ 4
	149		172580			480989	
1,8007982		+ 0,976386			+ 1,323130		

Endlich erhält man s tang f, tang f und log s, deren beide erstere ich, um abzukürzen, durch l und i bezeichnen werde:

a) für die äussere Berührung der Ränder

l		log *i*		log *s*	
0,564370		7,6649176		2,0866457	
	107		—33		860
0,564477		49143		2,0867317	
	87		—33		702
0,564564		49110		2,0868019	
	67		—34		549
0,564631		49076		2,0868568	
	47		—35		398
0,564678		49041		2,0868966	
	27		—36		248
0,564705		49005		2,0869214	
	8		—37		95
0,564713		48968		2,0869309	

b) für die innere Berührung der Ränder

t		$\log t$		$\log s$	
0,017946		7,6628022		0,591164	
	106		−33		2565
0,018052		27989		0,593729	
	87		−33		2079,5
0,018139		27956		0,595808,5	
	66		−34		1599,5
0,018205		27922		0,597408	
	47		−35		1124
0,018252		27887		0,598532	
	28		−36		652
0,018280		27851		0,599184	
	7		−37		182
0,018287		27814		0,599366	

Zweiter Abschnitt.

Analyse der Finsternisse für die Erde im Allgemeinen.

5.

Ich werde den gegenwärtigen Abschnitt durch eine Darstellung des Herganges einer Finsterniss, so wie er auf der ganzen Erde gesehen wird, eröffnen. Es werden sich daraus die Fragen ergeben, welche der sich nicht auf *gegebene* Punkte der Erde beziehende Theil der Theorie der Finsternisse zu beantworten hat. Ich werde nur von der Ränderberührung im Allgemeinen reden, ohne der äusseren und der inneren abgesondert zu erwähnen: das Folgende gilt also für die eine oder die andere, jenachdem der der einen oder der anderen entsprechende Schattenkegel angenommen wird.

Der Schattenkegel eines Paars von Gestirnen bewegt sich mit diesen: jede ihrer geocentrischen Zusammenkünfte verursacht, dass seine Axe sich dem Mittelpunkte der Erde bis auf ein grösseres oder kleineres Minimum der Entfernung nähert. Wenn dieses Minimum so gross ist, dass die Oberflächen des Schattenkegels und der Erde ausser Berührung bleiben, so wird offenbar keine Ränderberührung auf der Erde sichtbar, oder die Zusammenkunft der Gestirne erzeugt keine Finsterniss. Wenn aber die Oberflächen zum Durchschneiden gelangen, so ist ihre jedesmalige Durchschnittslinie die Curve auf der Oberfläche der Erde, für deren Punkte die Ränderberührung stattfindet. Sichtbar wird diese nur auf dem Theile der Curve, welchem der Berührungspunkt der Ränder *über* dem Horizonte liegt.

Die Ränderberührung wird am frühsten und am spätsten gesehen, wenn die Oberflächen des Schattenkegels und der Erde sich äusserlich berühren. In dem Momente jeder dieser Berührungen sieht nur ein Punkt der Erde die Berührung der Ränder der Gestirne, und die Bestimmung, sowohl des Moments selbst, als auch des Punkts der Erde, wo die Ränderberührung dann sichtbar ist, ist die *erste* der zu erfüllenden Forderungen. Sind Grösse und Bewegung des Schattenkegels so beschaffen, dass er im Verlaufe der Finsterniss ganz in die Erde, oder diese ganz in ihn eintritt, so entstehen noch zwei Berührungen der beiden Oberflächen, so dass dann die Forderung, die Zeiten ihrer Berührungen und die Punkte der Erde, wo diese stattfinden, zu bestimmen, durch vier Momente erfüllt werden kann, nämlich ausser den, den äusseren Berührungen beider Oberflächen entsprechenden τ und τ', auch durch die den inneren zugehörenden $\tau_{,}$ und $\tau'_{,}$.

Offenbar werden zwei Punkte der zwischen τ und $\tau_{,}$ und zwischen $\tau'_{,}$ und τ' durch die Oberfläche des Schattenkegels aus der der Erde ausgeschnittenen Curve, von geraden Linien in der ersteren *berührt*; nur der auf der Seite der Berührungspunkte, auf welcher die beiden Gestirne sich befinden, liegende Theil der Curve sieht die Ränderberührung wirklich; dem anderen Theile wird sie durch den zwischenliegenden Körper der Erde verborgen. Verbindet man diese besonderen Punkte der mit der Zeit fortschreitenden Curven durch eine krumme Linie, so ist dieses die Linie, auf welcher die Berührung der Ränder gesehen wird während der Berührungspunkt sich in der Ebene des Horizonts befindet. Ihre Bestimmung ist die *zweite* der zu erfüllenden Forderungen. Diese Linie besteht offenbar aus zwei getrennten Theilen wenn der Schattenkegel in die Erde, oder diese in ihn ganz eintritt; denn dann sind $\tau_{,}$ und $\tau'_{,}$ wirklich vorhanden und während ihrer Zwischenzeit giebt es keine die Erde berührende gerade Linien in der Oberfläche des Kegels; dagegen ist sie, wenn $\tau_{,}$ und $\tau'_{,}$ nicht wirklich vorhanden sind, es also jederzeit zwischen τ und τ' solche Linien giebt, ganz zusammenhangend.

Diese krumme Linie begrenzt den Raum der Erde, auf welchem die Finsterniss sichtbar wird. Sie begrenzt ihn an zwei voneinander getrennten Seiten, wenn sie selbst aus zwei getrennten Theilen besteht; sie schliesst ihn dagegen von einer Seite ganz ein, wenn sie selbst

ganz zusammenhangend ist; das erstere also, wenn τ und τ' wirklich vorhanden, das andere wenn sie nicht wirklich vorhanden sind. Wo sie ihn nicht begrenzt wird er von einer anderen Linie eingeschlossen, auf welcher die Gestirne einander nicht näher kommen als die Summe ihrer scheinbaren Halbmesser, oder auf welcher die Ränderberührung das *Maximum* der Finsterniss ist. Die Bestimmung dieser Linie ist die *dritte* der zu erfüllenden Forderungen.

Auf die Begrenzungen der Zeit einer Finsterniss und des Raums auf der Erde, wo sie sichtbar ist, welche beide durch die Erfüllung dieser drei Forderungen gegeben werden, beschränkt sich der in diesem Abschnitte abzuhandelnde Theil der Analyse der Finsternisse. Will man noch Linien auf der Erde bestimmen, auf welchen ein gegebener Theil der Scheibe des entfernteren Gestirns verdeckt wird, so darf dieses nicht als eine neue Forderung angesehen werden, indem dadurch nur verlangt wird, dass ein gegebener Theil des Halbmessers des entfernteren Gestirns, statt des ganzen, angenommen werde. Andere Aufgaben, welche frühere Behandlungen der Theorie der Finsternisse berücksichtigen, werden zum Theil ihr Interesse verlieren wenn die ausgesprochenen Forderungen erfüllt sind; zum Theil werden sie aus der Erfüllung der letzteren abgeleitet werden können.

6.

Aufgabe I.

Die krumme Linie auf der Erde zu bestimmen, auf welcher die Ränderberührung zweier kugelförmigen Gestirne zu gegebener Zeit gesehen wird.

Diese Aufgabe befindet sich zwar nicht unter den ausgesprochenen Forderungen, allein die Auflösung derselben eröffnet den Zugang zu ihrer Erfüllung. Wenn diese in ihrer vollen Einfachheit hervortreten soll, so muss der Auflösung der gegenwärtigen Aufgabe ein angemessener Grad von Entwickelung gegeben werden, welchen herbeizuführen ich versuchen werde.

Indem die Zeit gegeben ist, sind die von ihr abhängigen x, y, s, f gegeben; die in den Gleichungen (2), ausser diesen Grössen vorkommenden ξ, η, ζ hängen aber sowohl von a, d, π, als auch von der Polhöhe

φ und der Sternenzeit μ jedes, die Ränderberührung sehenden Punkts der Erde ab, und enthalten daher, indem die letztere die Summe der — entweder unmittelbar, oder durch die mittlere oder wahre Zeit, für welche die Aufgabe aufgelöset werden soll — gegebenen Sternenzeit μ' des ersten Meridians und der von ihm angezählten östlichen Länge ω ist, sowohl die Zeit, als auch beide zur Bestimmung des Punktes auf der Erde nöthigen Angaben φ und ω. Die Aufgabe fordert entweder einen Ausdruck der einen dieser Grössen durch die andere, oder die Ausdrücke beider durch eine unbestimmte Grösse, deren Wahl willkürlich bleibt. Jeder Werth dieser unbestimmten Grösse ergiebt dann zusammengehörige Werthe von φ und ω, also einen Punkt der gesuchten Curve; durch Änderungen ihres Werthes werden beliebig viele Punkte der Curve bekannt. Den letzteren dieser Wege werde ich einschlagen.

Die in den Ausdrücken (7) von ζ, η, ξ vorkommenden $\varrho\cos\varphi'$ und $\varrho\sin\varphi'$ haben, durch φ und die Excentricität der Erdmeridiane e, bekanntlich die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}\varrho\cos\varphi' &= \frac{\cos\varphi}{\sqrt{(1-ee\sin\varphi^2)}}\\ \varrho\sin\varphi' &= \frac{\sin\varphi\,(1-ee)}{\sqrt{(1-ee\sin\varphi^2)}}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

Führt man $\varphi_,$ ein, so dass

$$\cos\varphi_, = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{(1-ee\sin\varphi^2)}}\,,\quad \sin\varphi_, = \frac{\sin\varphi\sqrt{(1-ee)}}{\sqrt{(1-ee\sin\varphi^2)}}$$

also

$$\operatorname{tang}\varphi_, = \operatorname{tang}\varphi\sqrt{(1-ee)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15)$$

ist, und schreibt man $\mu'+\omega$ statt μ, so verwandeln sich die Formeln (7) in

$$\begin{aligned}\zeta &= \sin d\sin\varphi_,\sqrt{(1-ee)} + \cos d\cos\varphi_,\cos(\mu'-a+\omega)\\ \eta &= \cos d\sin\varphi_,\sqrt{(1-ee)} - \sin d\cos\varphi_,\cos(\mu'-a+\omega)\\ \xi &= \cos\varphi_,\sin(\mu'-a+\omega)\end{aligned}$$

und wenn man

$$\left.\begin{aligned}u &= \cos\varphi_,\sin(\mu'-a+\omega)\\ v &= \cos\varphi'\cos(\mu'-a+\omega)\\ w &= \sin\varphi'\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16)$$

annimmt, in

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= w \sin d \sqrt{(1-ee)} + v \cos d \\ \eta &= w \cos d \sqrt{(1-ee)} - v \sin d \\ \xi &= u \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Diese u, v, w werde ich, statt φ und ω, als die unbekannten Grössen der aufzulösenden Aufgabe betrachten. Hat man ihre, einem Werthe der unbestimmten Grösse entsprechenden Werthe gefunden, so ergeben die beiden ersten $\mu'-a+\omega$ und $\cos\varphi_,$, die letztere ist $=\sin\varphi_,$; man findet also $\tang\varphi_,$ und indem man seinen Werth durch $\sqrt{(1-ee)}$ dividirt, auch $\tang\varphi$ (15); ω wird durch $\mu'-a+\omega$ bekannt, da $\mu'-a$ gegeben ist. Ich werde also u, v, w durch die zu wählende unbestimmte Grösse ausdrücken.

Zuerst werde ich den Positionswinkel p des Berührungspunkts der Ränder am Punkte Z der Himmelskugel zur unbestimmten Grösse wählen. Dadurch erhält man, aus den Gleichungen (2),

$$\eta = y - (s-\zeta) \tang f \cos p$$
$$\xi = x - (s-\zeta) \tang f \sin p$$

und aus ihrer Verbindung mit (17):

$$\begin{aligned} u &= x - (s-\zeta) \tang f \sin p \\ v &= -y \sin d + (s-\zeta) \tang f \cos p + \zeta \cos d \\ \sqrt{(1-ee)}\, w &= \quad y \cos d - (s-\zeta) \tang f \cos p + \zeta \sin d \end{aligned}$$

oder, anders geschrieben:

$$\left.\begin{aligned} u &= a + \alpha\zeta \\ v &= b + \beta\zeta \\ w &= c + \gamma\zeta \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

in welchen Ausdrücken also $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ folgende Bedeutungen haben:

$$\left.\begin{aligned} a &= x - l \sin p & \alpha &= i \sin p \\ b &= -(y - l\cos p) \sin d & \beta &= \cos d - i \sin d \cos p \\ c &= (y - l \cos p) \frac{\cos d}{\sqrt{(1-ee)}} & \gamma &= \frac{\sin d + i \cos d \cos p}{\sqrt{(1-ee)}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (19)$$

indem l für $s \tang f$ und i für $\tang f$ geschrieben sind.

Da $uu+vv+ww=1$ ist, hat man, zur Bestimmung von ζ, die Gleichung

$$1 = (a+\alpha\zeta)^2 + (b+\beta\zeta)^2 + (c+\gamma\zeta)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

und wenn man die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} m &= aa + bb + cc - 1 \\ m' &= a\alpha + b\beta + c\gamma \\ m'' &= \alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma \\ P &= \sqrt{(m'm' - mm'')} \end{aligned}$$

einführt, durch ihre Auflösung:

$$\zeta = \frac{-m' \pm P}{m''},$$

wodurch sich die Formeln (18) in:

$$\left.\begin{aligned} m''u &= m''a - m'\alpha \pm \alpha P \\ m''v &= m''b - m'\beta \pm \beta P \\ m''w &= m''c - m'\gamma \pm \gamma P \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (21)$$

verwandeln. Hierdurch ist unsere Aufgabe aufgelöset. Ihre Auflösung musste nothwendig auf eine quadratische Gleichung führen, denn durch p, den den Schattenkegel erzeugenden Winkel f und den Ort seiner Spitze, ist die Lage der geraden Linie in der Oberfläche des Kegels gegeben, deren beide Durchschnittspunkte mit der Oberfläche der Erde gesucht, und da diese eine Oberfläche der zweiten Ordnung ist, durch eine quadratische Gleichung gefunden werden.

Die Bedeutung des unbestimmt gebliebenen Zeichens erkennt man, wenn man die Formeln (21) resp. in α, β, γ multiplicirt und die Producte addirt. Man erhält nämlich dadurch:

$$m''[\alpha u + \beta v + \gamma w] = \pm [\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma]\, P$$

oder

$$\pm P = \alpha u + \beta v + \gamma w; \quad \ldots\ldots (22)$$

von welchem Ausdrucke man leicht zeigen kann, dass er dem Cosinusse der Zenithdistanz des Berührungspunkts der Ränder proportional ist. Bezeichnet man nämlich die Geradeaufsteigung und Abweichung dieses Punkts durch a' und d', so hat man, durch die auf das sphärische Dreieck zwischen ihm, dem Punkte Z der Himmelskugel und dem Pole angewandten trigonometrischen Formeln:

$$\begin{aligned} \cos d' \sin(a'-a) &= \sin f \sin p &&= \alpha \cos f \\ \cos d' \cos(a'-a) &= \cos f \cos d - \sin f \sin d \cos p &&= \beta \cos f \\ \sin d' &= \cos f \sin d + \sin f \cos d \cos p &&= \gamma \cos f \sqrt{(1-ee)} \end{aligned}$$

und den Ausdrücken (16) von u, v, w zufolge:

$$\cos f[\alpha u + \beta v + \gamma w] = \frac{\sin d' \sin \varphi,}{\sqrt{(1-ee)}} + \cos d' \cos\varphi, \cos(\mu' - a' + \omega)$$

oder, wenn man φ wiedereinführt:

$$\pm P = \frac{\sin d' \sin\varphi + \cos d' \cos\varphi \cos(\mu' - a' + \omega)}{\cos f \sqrt{(1 - ee \sin\varphi^2)}}$$

Der Zähler dieses Ausdruckes ist der Cosinus der Zenithdistanz des Berührungspunkts der Ränder, also positiv oder negativ jenachdem dieser über oder unter dem Horizonte des durch u, v, w bestimmten Punktes der Erde liegt; der Nenner ist immer positiv. Durch die Anwendung des oberen Zeichens wird also derjenige der beiden, den Formeln (21) entsprechenden Punkte der Erde gefunden, welcher die Ränderberührung über seinem Horizonte sieht, während die Anwendung des unteren Zeichens den zweiten Punkt ergiebt, unter dessen Horizonte sie, in gleicher Lage des Berührungspunkts an der Himmelskugel, vor sich geht. Da man nur Veranlassung haben wird, den ersten dieser Punkte aufzusuchen, so kann man das untere Zeichen der Formeln (21) weglassen.

In dem Falle einer inneren Berührung der Ränder muss noch entschieden werden, ob sie einer ringförmigen, oder einer gänzlichen Finsterniss zugehört. Das erstere ist der Fall wenn das nähere Gestirn kleiner erscheint als das entferntere, oder wenn die Spitze des Schattenkegels in der Richtung der Gestirne liegt; das letztere wenn sie in der entgegengesetzten Richtung liegt. Die Finsterniss ist daher ringförmig oder gänzlich, jenachdem $s-\zeta$ positiv oder negativ ist.

7.

Es hat keine Schwierigkeit, aus den hier mitgetheilten einfachen Formeln zur Erfindung eines Punktes der Erdoberfläche, welcher die Ränderberührung zu einer gegebenen Zeit, bei einem gegebenen Werthe von p sieht, Vorschriften abzuleiten, nach welchen beliebig viele Punkte der in der *Aufgabe I.* geforderten Curve durch leichtere Rechnung gefunden werden können. Man erlangt solche Vorschriften, wenn man die Formeln (21) so verändert, dass sie, statt dreier der zugleich von der Zeit und von p abhängigen Grössen a, b, c, α, β, γ, drei andere enthalten, welche nur von der Zeit abhangen, also für jeden gegebenen Werth derselben nur einmal berechnet werden dürfen. Ich werde zwei verschiedene Veränderungen dieser Art verfolgen: beide beruhen auf der Einführung von

$$\alpha' = a + \alpha s$$
$$\beta' = b + \beta s$$
$$\gamma' = c + \gamma s$$

welche Grössen, den Formeln (19) zufolge, von p unabhängig sind, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= x \\ \beta' &= s\cos d - y\sin d \\ \gamma' &= \frac{s\sin d + y\cos d}{\sqrt{(1-ee)}} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (23)$$

Schafft man a, b, c aus der Rechnung, indem man $\alpha' - \alpha s$, $\beta' - \beta s$, $\gamma' - \gamma s$ dafür setzt, so verwandeln die Formeln (21) sich in:

$$\begin{aligned} m''u &= m''\alpha' + (P - m''s - m')\,\alpha \\ m''v &= m''\beta' + (P - m''s - m')\,\beta \\ m''w &= m''\gamma' + (P - m''s - m')\,\gamma \end{aligned}$$

und wenn man θ für $m''s + m' = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$ schreibt in

$$\left.\begin{aligned} m''u &= m''\alpha' + (P-\theta)\,\alpha \\ m''v &= m''\beta' + (P-\theta)\,\beta \\ m''w &= m''\gamma' + (P-\theta)\,\gamma \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (24)$$

Durch α, β, γ, α', β', γ' ausgedrückt ist

$$PP = m'm' - mm'' = (\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')^2 - (\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)(\alpha'\alpha' + \beta'\beta' + \gamma'\gamma' - 1)$$

und wenn man $\alpha'\alpha' + \beta'\beta' + \gamma'\gamma'$ durch $\sigma\sigma$ bezeichnet:

$$P = \sqrt{\left\{\theta\theta - m''(\sigma\sigma - 1)\right\}} \dots\dots\dots\dots (25)$$

Diese Formeln können, durch die Benutzung der trigonometrischen Tafeln, zur Anwendung geschickter gemacht werden. Sucht man, für die Zeit, für welche man die in der Aufgabe geforderte krumme Linie kennen lernen will, σ, ε, δ nach den Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \sigma\sin\varepsilon &= x &&= \alpha' \\ \sigma\cos\varepsilon\cos\delta &= s\cos d - y\sin d &&= \beta' \\ \sigma\cos\varepsilon\sin\delta &= \frac{s\sin d + y\cos d}{\sqrt{(1-ee)}} &&= \gamma' \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (26)$$

worin das Zeichen von σ so bestimmt werden kann, dass ε und δ zwischen $-90°$ und $90°$ fallen, und ferner für jeden Werth von p, für welchen man u, v, w verlangt, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{d}$:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{r}\sin\mathfrak{e} &= i\sin p &&= \alpha \\ \mathfrak{r}\cos\mathfrak{e}\cos\mathfrak{d} &= \cos d - i\sin d\cos p &&= \beta \\ \mathfrak{r}\cos\mathfrak{e}\sin\mathfrak{d} &= \frac{\sin d + i\cos d\cos p}{\sqrt{(1-ee)}} &&= \gamma \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (27)$$

so erhält man

$$\theta = \mathfrak{r}\sigma\,[\sin\varepsilon\,\sin\mathfrak{e} + \cos\varepsilon\,\cos\mathfrak{e}\,\cos(\delta-\mathfrak{d})]$$
$$m'' = \mathfrak{s}\mathfrak{r}$$

und wenn man Θ nach einer der Formeln:

$$\cos\Theta = \sin\varepsilon\,\sin\mathfrak{e} + \cos\varepsilon\,\cos\mathfrak{e}\,\cos(\delta-\mathfrak{d})$$

oder $\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2 = \sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon-\mathfrak{e})^2\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\mathfrak{d})^2 + \cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon+\mathfrak{e})^2\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\mathfrak{d})^2$

bestimmt,

$$P = \mathfrak{r}\sqrt{[1-\sigma\sigma\sin\Theta^2]}$$

also

$$\frac{P-\theta}{m''} = \frac{\sqrt{[1-\sigma\sigma\sin\Theta^2]}-\sigma\cos\Theta}{\mathfrak{r}}$$

Setzt man nun

$$\sin\Theta' = \sigma\sin\Theta$$

so wird

$$\frac{P-\theta}{m''} = \frac{-\sin(\Theta'-\Theta)}{\mathfrak{r}\sin\Theta}$$

wodurch die Formeln (24) sich in:

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha' - \frac{\sin(\Theta'-\Theta)}{\sin\Theta}\sin\mathfrak{e} \\ v &= \beta' - \frac{\sin(\Theta'-\Theta)}{\sin\Theta}\cos\mathfrak{e}\cos\mathfrak{d} \\ w &= \gamma' - \frac{\sin(\Theta'-\Theta)}{\sin\Theta}\cos\mathfrak{e}\sin\mathfrak{d} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

verwandeln. Das Kennzeichen einer ringförmigen, oder gänzlichen Finsterniss, im Falle einer inneren Berührung der Ränder, ist der positive oder negative Werth von

$$\mathfrak{s}-\zeta = \frac{\sin(\Theta'-\Theta)}{\mathfrak{r}\sin\Theta}$$

Obgleich diese Formeln ohne Ausnahme eines besonderen Falles angewandt werden können, so ergeben sie doch das Gesuchte nur dann mit einer Genauigkeit, welche der auf die Rechnung gewandten etwa gleich ist, wenn die Entfernung der Spitze des Schattenkegels von der Erde, vergleichungsweise mit x, y nicht sehr gross ist. Denn wenn sie sehr gross ist, sind δ und $\mathfrak{d}$ sehr wenig voneinander verschieden, so wie auch ε und $\mathfrak{e}$ sehr klein, wodurch Θ gleichfalls sehr klein wird und die Ausdrücke (28) Unterschiede zweier Grössen von der Ordnung der Entfernung der Spitze des Schattenkegels werden. — Unter allen wirklich vorkommenden Ränderberührungen zweier Gestirne gehört aber *allein* den *inneren* der Sonne und des Mondes ein Schattenkegel an,

dessen Spitze nicht sehr weit von der Erde entfernt ist, wesshalb die Formeln (28) nur für die inneren, sich bei Sonnenfinsternissen ereignenden Ränderberührungen empfehlenswerth sind.

8.

Die zweite Veränderung der im 6[ten] § gegeben Auflösung der *Aufgabe I.* erhält man durch die Wegschaffung von α, β, γ und ihren Ersatz durch α', β', γ'. Man gelangt am einfachsten dazu, wenn man die Ausdrücke (18) von u, v, w, statt von ζ, von einer anderen unbekannten Grösse ζ' abhängig macht, welche zu der vorigen die Relation

$$\zeta = \frac{s\zeta'}{s+\zeta'}$$

hat, also jene Ausdrücke in:

$$\left.\begin{aligned} (s+\zeta')\,u &= as + \alpha'\zeta' \\ (s+\zeta')\,v &= bs + \beta'\zeta' \\ (s+\zeta')\,w &= cs + \gamma'\zeta' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

und die Gleichung (20) in:

$$(s+\zeta')^2 = (as+\alpha'\zeta')^2 + (bs+\beta'\zeta')^2 + (cs+\gamma'\zeta')^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

verwandelt. Die Auflösung dieser Gleichung ergiebt:

$$\zeta' = \frac{-s\,[a\alpha'+b\beta'+c\gamma'-1] \pm s\sqrt{[(a\alpha'+b\beta'+c\gamma'-1)^2 - (aa+bb+cc-1)(\sigma\sigma-1)]}}{\sigma\sigma-1}$$

welcher Ausdruck, der schon im 6[ten] § gemachten Bemerkung zufolge, ohne Zweideutigkeit, nur mit dem oberen Zeichen zu nehmen ist. Er wird unbestimmt wenn $\sigma\sigma = 1$ ist, wesshalb dieser Fall ausgeschlossen und die Fälle $\sigma\sigma > 1$ und $\sigma\sigma < 1$ von einander unterschieden werden müssen. Führt man θ' und P' ein, so dass

in dem 1[ten] Falle:

$$\left.\begin{aligned} \theta' &= \frac{a\alpha'+b\beta'+c\gamma'-1}{\sqrt{(\sigma\sigma-1)}} \\ P'P' &= 1-aa-bb-cc+\theta'\theta' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

in dem 2[ten] Falle:

$$\left.\begin{aligned} \theta' &= \frac{a\alpha'+a\beta'+c\gamma'-1}{\sqrt{(1-\sigma\sigma)}} \\ P'P' &= aa+bb+cc-1+\theta'\theta' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (31^*)$$

bedeuten, so wird, in jenem Falle

$$\zeta' = \frac{s}{\sqrt{(\sigma\sigma-1)}}(P'-\theta'),$$

in diesem

$$\zeta' = \frac{-s}{\sqrt{(1-\sigma\sigma)}}(P'-\theta')$$

und die Formeln (29) verwandeln sich, wenn $\sigma\sigma > 1$ ist, in:

$$\left.\begin{aligned}\left[1+\frac{P'-\theta'}{\sqrt{(\sigma\sigma-1)}}\right]u &= a+\alpha'.\frac{P'-\theta'}{\sqrt{(\sigma\sigma-1)}}\\ \left[1+\frac{P'-\theta'}{\sqrt{(\sigma\sigma-1)}}\right]v &= b+\beta'.\frac{P'-\theta'}{\sqrt{(\sigma\sigma-1)}}\\ \left[1+\frac{P'-\theta'}{\sqrt{(\sigma\sigma-1)}}\right]w &= c+\gamma'.\frac{P'-\theta'}{\sqrt{(\sigma\sigma-1)}}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

und wenn $\sigma\sigma < 1$ ist, in:

$$\left.\begin{aligned}\left[1-\frac{P'-\theta'}{\sqrt{(1-\sigma\sigma)}}\right]u &= a-\alpha'.\frac{P'-\theta'}{\sqrt{(1-\sigma\sigma)}}\\ \left[1-\frac{P'-\theta'}{\sqrt{(1-\sigma\sigma)}}\right]v &= b-\beta'.\frac{P'-\theta'}{\sqrt{(1-\sigma\sigma)}}\\ \left[1-\frac{P'-\theta'}{\sqrt{(1-\sigma\sigma)}}\right]w &= c-\gamma'.\frac{P'-\theta'}{\sqrt{(1-\sigma\sigma)}}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (32^*)$$

Das in diesen Formeln vorkommende P' hängt mit dem früher angewandten P so zusammen, dass

in dem 1ten Falle $P'P'(\sigma\sigma-1) = PPss$

in dem 2ten Falle $P'P'(1-\sigma\sigma) = PPss$

ist; dieses geht aus dem Ausdrucke von P hervor, wenn darin α', β', γ' statt α, β, γ eingeführt werden.

Wenn diese Formeln angewandt werden sollen, wird es bequem sein ϱ und δ' so zu bestimmen, dass

$$\left.\begin{aligned}\varrho\sin\delta' &= \sin d\\ \varrho\cos\delta' &= \frac{\cos d}{\sqrt{(1-ee)}}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

sind. Dadurch erhält man

$$\left.\begin{aligned}a &= x-l\sin p\\ b &= -(y-l\cos p)\,\varrho\sin\delta'\\ c &= (y-l\cos p)\,\varrho\cos\delta'\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

und ferner:

1) wenn $\sigma\sigma > 1$ ist und $\frac{1}{\sigma} = \sin\lambda$ gesetzt wird:

$$\theta' = (x - l\sin p)\frac{\sin\varepsilon}{\cos\lambda} + \varrho(y - l\cos p)\frac{\cos\varepsilon\sin(\delta-\delta')}{\cos\lambda} - \operatorname{tang}\lambda$$

$$P'P' = 1 - (x - l\sin p)^2 - \varrho\varrho(y - l\cos p)^2 + \theta'\theta'$$

$$\left.\begin{aligned}[1 + \operatorname{tang}\lambda(P'-\theta')]\,u &= a + \frac{\sin\varepsilon}{\cos\lambda}(P'-\theta')\\ [1 + \operatorname{tang}\lambda(P'-\theta')]\,v &= b + \frac{\cos\varepsilon\cos\delta}{\cos\lambda}(P'-\theta')\\ [1 + \operatorname{tang}\lambda(P'-\theta')]\,w &= c + \frac{\cos\varepsilon\sin\delta}{\cos\lambda}(P'-\theta')\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(35)$$

2) wenn $\sigma\sigma < 1$ ist und $\sigma = \sin\lambda$ gesetzt wird:

$$\theta' = (x - l\sin p)\sin\varepsilon\operatorname{tang}\lambda + \varrho(y - l\cos p)\cos\varepsilon\sin(\delta-\delta')\operatorname{tang}\lambda - \sec\lambda$$

$$P'P' = (x - l\sin p)^2 + \varrho\varrho(y - l\cos p)^2 - 1 + \theta'\theta'$$

$$\left.\begin{aligned}[1 - \sec\lambda(P'-\theta')]\,u &= a - \sin\varepsilon\operatorname{tang}\lambda(P'-\theta')\\ [1 - \sec\lambda(P'-\theta')]\,v &= b - \cos\varepsilon\cos\delta\operatorname{tang}\lambda(P'-\theta')\\ [1 - \sec\lambda(P'-\theta')]\,w &= c - \cos\varepsilon\sin\delta\operatorname{tang}\lambda(P'-\theta')\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(35^*)$$

Das Kennzeichen einer ringförmigen, oder gänzlichen Finsterniss, im Falle einer inneren Berührung der Ränder, ist der positive oder negative Werth von

$$s - \zeta = \frac{ss}{s + \zeta'},$$

oder die Gleichheit oder Verschiedenheit des Zeichens von s und des Zeichens des gemeinschaftlichen Factors von u, v, w.

Die Unbequemlichkeit, welche die im vorigen § gegebene Vorschrift in dem Falle besass, in welchem die Entfernung der Spitze des Schattenkegels von der Erde weit grösser ist als x und y, besitzt die gegenwärtige nicht; vielmehr wird diese desto vortheilhafter, jemehr $\sigma\sigma$ von 1 verschieden ist. Sie empfiehlt sich also im Allgemeinen, indem allein die inneren Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes Fälle herbeiführen können, in welchen die frühere Vorschrift vorzuziehen ist.

9.

Ich muss noch Einiges über den im vorigen § ausgeschlossenen Fall sagen, welcher eintritt wenn $\sigma\sigma = 1$ ist.

Legt man um den Mittelpunkt der Erde ein ihr ähnliches elliptisches Rotationssphäroid, dessen Oberfläche durch die Spitze des Schattenkegels

geht, deren dem Erdaequator parallele Coordinaten x und $s\cos d - y\sin d$ sind, während die auf ihm senkrechte Coordinate $s\sin d + y\cos d$ ist, so ist das Quadrat seiner halben grossen Axe

$$= xx + (s\cos d - y\sin d)^2 + \frac{(s\sin d + y\cos d)^2}{1 - ee}$$

Da dieses auch der Ausdruck von $\sigma\sigma$ ist, so folgt, dass der ausgeschlossene Fall eintritt, wenn die Spitze des Schattenkegels durch die Oberfläche der Erde geht. Er kann also nur bei inneren Berührungen der Ränder zweier Gestirne, in der Wirklichkeit nur bei den inneren Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes, und zwar nur dann vorkommen, wenn die Spitze des Schattenkegels sich durch die Erde hindurch bewegt, in welchem Falle er in den beiden Zeitmomenten ihres Durchganges durch die Oberfläche der Erde wirklich eintritt.

Wenn $\sigma\sigma = 1$ ist, werden die beiden Wurzeln der Gleichung (20) rational. Denn da

$$\sigma\sigma = (a + \alpha s)^2 + (b + \beta s)^2 + (c + \gamma s)^2 = 1 + m + 2m's + m''ss$$

also in dem Falle $\sigma\sigma = 1$:

$$0 = m + 2m's + m''ss$$

und die Gleichung (20)

$$0 = m + 2m'\zeta + m''\zeta\zeta$$

ist, kann diese

$$0 = m''(\zeta\zeta - ss) + 2m'(\zeta - s)$$

oder $0 = (\zeta - s)\,[m''(\zeta + s) + 2m']$

geschrieben, ihr also durch

$$\zeta = s \text{ und } \zeta = -s - \frac{2m'}{m''}$$

genügegeleistet werden. Die erste dieser Wurzeln gehört dem Falle zu, in welchem der durch u, v, w bestimmte Punkt der Erde der ist, wo auch die Spitze des Schattenkegels sich befindet; wenn er stattfindet verwandeln die Formeln (18) sich in:

$$\left.\begin{aligned} u &= a + \alpha s = \alpha' = \sin\varepsilon \\ v &= b + \beta s = \beta' = \cos\varepsilon\cos\delta \\ w &= c + \gamma s = \gamma' = \cos\varepsilon\sin\delta \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots (36)$$

und bestimmen also den gesuchten Punkt der Erde unabhängig von p; was auch nothwendig ist, indem dieser Punkt die Berührung der Ränder der beiden Gestirne an allen ihren Punkten sieht. Die zweite Wurzel

entspricht dem Falle, in welchem der durch u, v, w bestimmte Punkt der Erde auf der Curve liegt, welche der Schattenkegel, während seine Spitze in der Oberfläche der Erde ist, nach seinem Durchgange durch ihr Inneres, ausschneidet; wenn man sie anwendet erhält man:

$$\left.\begin{aligned} u &= a - \alpha\left(s + \frac{2m'}{m''}\right) = \alpha' - 2\alpha\left(s + \frac{m'}{m''}\right) \\ v &= b - \beta\left(s + \frac{2m'}{m''}\right) = \beta' - 2\beta\left(s + \frac{m'}{m''}\right) \\ w &= c - \gamma\left(s + \frac{2m'}{m''}\right) = \gamma' - 2\gamma\left(s + \frac{m'}{m''}\right) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

Ob die erste oder die zweite Wurzel angewandt werden muss, geht aus dem Zeichen von (22):

$$\pm P = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

hervor. Setzt man in diesen Ausdruck sowohl die Ausdrücke (36) als auch die Ausdrücke (37) so erhält man, im ersten Falle $\pm P = m''s + m' = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$, im zweiten $= -\alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma'$: jener oder dieser ist also der vorhandene, jenachdem $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$ positiv oder negativ ist.

Ausser dem hier verfolgten Falle $\sigma\sigma = 1$, muss noch der Fall $s = o$ von der im vorigen § gegebenen Bestimmung von u, v, w ausgeschlossen werden. Denn in diesem Falle verschwindet ζ', welchen Werth auch ζ haben mag, und die dadurch identisch $=0$ werdenden Ausdrücke (29) lassen u, v, w unbestimmt. Wenn dieser Fall eintritt, so wie auch wenn s sehr klein ist, und nicht minder wenn $\sigma\sigma$ sehr wenig von 1 verschieden ist, müssen die im 7ten § gegebenen Vorschriften befolgt werden. Alle diese Ursachen, die Vorschriften des vorigen §'s zu verlassen, können nur in Fällen innerer Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes, und zwar nur wenn die Spitze des Schattenkegels durch die Erde geht, also nur in selteneren Fällen solcher Berührungen vorhanden sein.

10.

Die in dem Vorigen entwickelte Auflösung der *Aufgabe I.* lehrt, wie man *bestimmten* Werthen des willkürlichen Winkels p zugehörige Punkte der ihr entsprechenden Curve finden kann. Man würde sich hiemit begnügen können, wenn nichts Anderes gefordert würde; aber es muss wirklich *mehr* gefordert werden, indem das Interesse der Aufgabe, wie ich schon am Anfange des 6ten §'s bemerkt habe, nichtsowohl in der

Kenntniss der ihr zu jeder gegebenen Zeit entsprechenden Curve, als in den Mitteln zu suchen ist, welche ihre Auflösung der Auflösung anderer Aufgaben der Analyse der Finsternisse gewährt: es muss also nicht allein eine möglichst leicht anwendbare, von *bestimmten* Werthen von p ausgehende Vorschrift zur Erfindung von Punkten der Curve, sondern auch die einfachste, die willkürliche Grösse *unbestimmt* lassende Auflösung der Aufgabe gefordert werden.

Um zu zeigen, dass in der letzteren Beziehung noch Wesentliches zu wünschen ist, bemerke ich hier nur, dass die erste und zweite der im 5ten § an die Theorie der Finsternisse gemachten Forderungen, durch die Verfolgung der Bedingung $P = o$ erfüllt werden müssen; dass sie die Bestimmung der dieser Bedingung entsprechenden Werthe von p und ihre weitere Anwendung verlangen; dass sie auf beträchtliche Schwierigkeiten führen müssen, indem der Ausdruck von PP den Cosinus und den Sinus von p, so wie auch ihre Quadrate und ihr Product enthält, also in Beziehung auf p vom 4ten Grade ist. Dieser, die Durchführung der noch zu suchenden Auflösungen anderer Aufgaben erschwerende, hohe Grad der Gleichung $PP = o$ kann zwar nicht vermieden werden, so lange p die unbestimmte Grösse bleibt, von welcher die Ausdrücke von u, v, w abhängig gemacht werden; aber die Wahl der unbestimmten Grösse ist willkürlich, und man kann statt p eine andere substituiren, durch deren Einführung der Ausdruck von PP wesentlich vereinfacht wird.

Euler hat, als es darauf ankam, eine ganze, rationale Function von x vom 4ten Grade, von den ungeraden Potenzen von x zu befreien, dieses durch die Substitution einer anderen veränderlichen Grösse y erlangt, deren Verbindung mit x im Wesentlichen dieselbe ist, welche man zwischen den trigonometrischen Linien eines neuen unbestimmten Winkels und denen von p annehmen muss, um den Grad von PP auf den zweiten zu erniedrigen; er hat damit die glänzende Reihe neuerer Entdeckungen über die elliptischen Transcendenten eröffnet. *Gauss* hat, in der berühmten Abhandlung *), in welcher er die Auflösung einer sehr wichtigen Aufgabe der physischen Astronomie gegeben hat, den Erfolg wieder durch dieselbe Substitution, welche jedoch nun in ganz

*) Determinatio Attractionis &c. Gottingae 1818.

verschiedener Form auftreten musste, erlangt. *Jacobi* hat viel Vortreffliches darüber gesagt *), auch sie in einer Richtung verfolgt, welche jene Aufgabe nicht nimmt und welche zu der Auflösung schwieriger geometrischer Probleme führt, zu denen sich auch das gegenwärtige gesellen wird. Die beiden zuletzt genannten grossen Geometer haben diese Materie in so helles Licht gesetzt, dass ihre fernere Anwendung keine Schwierigkeit mehr hat. — Indem ich die im ersten Bande dieses Werks S. 263 gegebene Zerlegung von PP in zwei Factoren, mit dieser Substitution einer neuen unbestimmten Grösse verbunden habe, glaube ich, die Aufgaben der Theorie der Finsternisse auf ihre einfachste Gestalt zurückgeführt zu haben.

11.

Der Ausdruck von PP hat, nach $\cos p$ und $\sin p$ geordnet, die Form:

$$PP = a + 2b\cos p + 2c\sin p + d\cos p^2 + 2e\cos p\sin p + f\sin p^2 \; \ldots\ldots \; (38)$$

deren Coefficienten ich zuerst näher angeben werde.

Im 7ten § findet sich der Ausdruck:

$$PP = (\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')^2 - (\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)(\alpha'\alpha' + \beta'\beta' + \gamma'\gamma' - 1)$$

welcher durch die Substitution der Ausdrücke (27) von α, β, γ, unmittelbar in die Form (38) übergeht. Die Ausdrücke ihrer Coefficienten werden vereinfacht, wenn zwei neue, mit s und y nahe verbundene Grössen s' und y', welche aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} s\cos d - y\sin d &= s'\cos d - y'\sin d \\ \frac{s\sin d + y\cos d}{\sqrt{(1-ee)}} &= (s'\sin d + y'\cos d)\sqrt{(1-ee)} \end{aligned}\right\} \; \ldots\ldots\ldots \; (39)$$

hervorgehen, statt s und y, in die Ausdrücke (26) von α', β', γ' eingeführt, diese Ausdrücke also in:

$$\begin{aligned} \alpha' &= x \\ \beta' &= s'\cos d - y'\sin d \\ \gamma' &= (s'\sin d + y'\cos d)\sqrt{(1-ee)} \end{aligned}$$

verwandelt werden. Durch diese Änderung wird nämlich der Nenner $1-ee$ von $\gamma\gamma'$ weggeschafft und $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$ erhält den Ausdruck:

*) *Crelle.* Journal für die reine und angewandte Mathematik. 8. Band. S. 253 & 321. Berlin 1832.

$$x\, i \sin p + (s' \cos d - y' \sin d)(\cos d - i \sin d \cos p) + (s' \sin d + y' \cos d)(\sin d + i \cos d \cos p)$$

welcher ganz einfach, nämlich:

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = s' + y'\, i \cos p + x\, i \sin p$$

ist. Indem man noch die Ausdrücke (27) von α, β, γ, und $\sigma\sigma$ für $\alpha'\alpha' + \beta'\beta' + \gamma'\gamma'$ schreibt, wird

$$PP = \left[s' + y'\, i \cos p + x\, i \sin p\right]^2 - (\sigma\sigma - 1)\left[ii \sin p^2 + (\cos d - i \sin d \cos p)^2 + \frac{(\sin d + i \cos d \cos p)^2}{1 - ee}\right]$$

oder die Coefficienten des Ausdruckes (38) werden:

$$\left.\begin{aligned} a &= s's' - (\sigma\sigma - 1)\,\frac{1 - ee \cos d^2}{1 - ee} \\ b &= i\left[s'y' - (\sigma\sigma - 1)\,\frac{ee \cos d \sin d}{1 - ee}\right] \\ c &= i \,.\, s'x \\ d &= ii\left[y'y' - (\sigma\sigma - 1)\,\frac{1 - ee \sin d^2}{1 - ee}\right] \\ e &= ii\, xy' \\ f &= ii\left[xx - (\sigma\sigma - 1)\right] \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots (40)$$

Der erste dieser Coefficienten kann auch in der Form:

$$a = (1 - xx)\,\frac{1 - ee \cos d^2}{1 - ee} - \frac{yy}{1 - ee}$$

dargestellt werden, welche ihn, immer wenn $\sigma\sigma - 1$ einige Einheiten übersteigt, bei gleich genauer Rechnung genauer ergiebt. Die hier eingeführten Grössen haben, den Gleichungen (39) gemäss, die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} s' &= s\,\frac{1 - ee \cos d^2}{1 - ee} + y\,\frac{ee \cos d \sin d}{1 - ee} = s + \frac{ee \sin d}{1 - ee}\,[s \sin d + y \cos d] \\ y' &= s\,\frac{ee \cos d \sin d}{1 - ee} + y\,\frac{1 - ee \sin d^2}{1 - ee} = y + \frac{ee \cos d}{1 - ee}\,[s \sin d + y \cos d] \end{aligned}\right\} \dots (41)$$

Die im 8ten § entwickelte Form der Ausdrücke von u, v, w enthält nicht P, sondern P', und zwischen beiden findet, in den dort getrennten Fällen, die Verbindung

$$P'P' = \frac{ss}{\sigma\sigma - 1}\, PP \text{ und } = \frac{ss}{1 - \sigma\sigma}\, PP$$

statt. Will man die Ausdrücke der Coefficienten des nach $\cos p$ und $\sin p$ geordneten Ausdruckes von $P'P'$ kennnen lernen, so muss man daher die Ausdrücke (40), jenachdem der erste, oder der zweite Fall der vorhandene ist, in

$$\frac{ss}{\sigma\sigma-1} \text{ oder } \frac{ss}{1-\sigma\sigma}$$

multipliciren. Wenn man aber die Vorschriften des 8[ten] §'s befolgt, ist die Einführung von s' und y' nicht zur Erlangung einfacher Ausdrücke der Coefficienten des Ausdruckes von $P'P'$ nothwendig, indem die dort schon eingeführten Grössen gleichfalls solche Ausdrücke hervorbringen. Bezeichnet man durch h, k, q die, in dem Falle einer grossen Entfernung der Spitze des Schattenkegels von der Erde immer sehr kleinen Grössen:

$$\left.\begin{aligned} h &= \sin\varepsilon \sec\lambda \\ k &= \cos\varepsilon \sin(\delta-\delta') \sec\lambda \\ q &= hx + k\varrho y - \operatorname{tang}\lambda \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots \quad (42)$$

so wird, in dem Falle $\sigma\sigma > 1$ (35):

$$\theta' = q - k\varrho l \cos p - hl \sin p \dots\dots\dots \quad (43)$$

und die Coefficienten von $P'P'$ werden:

$$\left.\begin{aligned} a &= 1 - xx - \varrho\varrho yy + qq \\ b &= \varrho l[\varrho y - kq] \\ c &= l[x - hq] \\ d &= -\varrho\varrho ll[1 - kk] \\ e &= \varrho ll hk \\ f &= -ll[1 - hh] \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots \quad (44)$$

Bezeichnet man dagegen, für den Fall $\sigma\sigma < 1$ (35*):

$$\left.\begin{aligned} h &= \sin\varepsilon \operatorname{tang}\lambda \\ k &= \cos\varepsilon \sin(\delta-\delta') \operatorname{tang}\lambda \\ q &= hx + k\varrho y - \sec\lambda \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots \quad (42^*)$$

so wird wieder

$$\theta' = q - k\varrho l \cos p - hl \sin p \dots\dots\dots \quad (43^*)$$

und die Coefficienten von $P'P'$ werden:

$$\left.\begin{aligned} a &= xx + \varrho\varrho yy - 1 + qq \\ b &= -\varrho l[\varrho y + kq] \\ c &= -\;l[x + hq] \\ d &= \varrho\varrho ll[1 + kk] \\ e &= \varrho ll hk \\ f &= ll[1 + hh] \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots \quad (44^*)$$

12.

Von Ausdrücken, welche in der Form (38) begriffen sind, habe ich in der VI. Abhandlung des ersten Bandes dieses Werks, S. 263 u. s. w. gezeigt, dass sie in die immer reellen Factoren:

$$PP = \frac{1}{a+g}\,[a+g+(b+R)\cos p+(c+R')\sin p]\,[a+g+(b-R)\cos p+(c-R')\sin p] \quad (45)$$

zerlegt werden können, worin g eine reelle Wurzel der cubischen Gleichung:

$$0 = (a+x)(d-x)(f-x) - bb(f-x) - cc(d-x) - ee(a+x) + 2bce \;\ldots\ldots\; (46)$$

bedeutet, welche Gleichung, nach den Potenzen von x geordnet:

$$0 = x^3 - Axx + Bx - C \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (47)$$

die Coefficienten

$$\begin{aligned} A &= d+f-a \\ B &= bb+cc-ee-a(d+f)+df \\ C &= bbf+ccd+eea-adf-2bce \end{aligned}$$

hat; worin ferner R und R' durch die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} RR &= bb-(a+g)(d-g) \\ R'R' &= cc-(a+g)(f-g) \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (48)$$

und ihr Product, also auch die Gleichheit oder Verschiedenheit ihrer Zeichen, durch

$$RR' = bc - e(a+g) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (49)$$

gegeben werden, die Zeichen aber übrigens willkürlich bleiben, was auch nothwendig ist, indem diese Willkür durch die offenbar gleichgültige Verwechselung der beiden Factoren miteinander hervorgebracht wird.

Daselbst habe ich ferner gezeigt, dass, wenn die cubische Gleichung drei reelle Wurzeln hat, der Gleichung $PP=0$ entweder durch vier imaginäre, oder durch vier reelle Werthe von p genügegeleistet wird, das erstere oder das letztere offenbar, jenachdem $(b+R)^2+(c+R')^2$ und $(b-R)^2+(c-R')^2$ kleiner oder grösser sind als $(a+g)^2$; dass ihr durch zwei imaginäre und zwei reelle Werthe von p genügt wird wenn die cubische Gleichung nur eine reelle Wurzel hat, in welchem Falle also eine der eben angeführten Summen der Quadrate kleiner, die andere grösser ist als $(a+g)^2$. Auf diese Sätze werde ich das Folgende gründen.

Wenn die Ränderberührung zu einer gegebenen Zeit, für welche geltend die Werthe der Coefficienten von (38) angenommen werden,

nirgends auf der Erde sichtbar ist, so muss P für jeden Werth von p imaginär, oder PP negativ werden; wird aber PP für jeden Werth von p positiv, so entspricht auch jedem ein Punkt der Erde, welcher die Ränderberührung sieht. In diesen beiden Fällen hat die cubische Gleichung drei reelle Wurzeln, deren eine die Zerfällung von PP in zwei reelle Factoren ergiebt, und $(b+R)^2+(c+R')^2$ und $(b-R)^2+(c-R')^2$ sind beide kleiner als $(a+g)^2$. Wird PP nur zwischen gewissen Grenzen von p positiv, für alle übrigen Werthe von p negativ, so muss es entweder für *zwei* Werthe von p verschwinden, also eine der angeführten Summen der Quadrate kleiner, die andere grösser sein als $(a+g)^2$, und die cubische Gleichung nur eine reelle Wurzel haben; oder es muss für *vier* Werthe von p verschwinden, also beide Summen grösser sein als $(a+g)^2$, und die cubische Gleichung muss drei reelle Wurzeln haben. — Indem jeder Werth von p eine ihm entsprechende gerade Linie in der Oberfläche des Schattenkegels, ein Werth von p für welchen PP verschwindet aber eine die Oberfläche der Erde *berührende* dieser Linien bestimmt (§ 6.), so wird klar, dass der zuletzt angeführte Fall nur eintreten kann, wenn *vier* gerade Linien in der Kegeloberfläche die Erde berühren können. Mathematisch möglich ist dieser Fall, und er muss offenbar eintreten, wenn die Ausdehnung des Schattenkegels und seine Lage gegen die Erde so beschaffen sind, dass die kleine Axe der Erde sich ganz innerhalb des von ihm umschlossenen Raumes befindet, die Enden der grossen aber aus diesem hervorragen; aber in der Wirklichkeit wird er nicht vorkommen, indem kein Paar von Gestirnen vorhanden ist, von dessen Schattenkegeln einer, da wo er die Erde treffen kann, die dazu erforderliche Ausdehnung besässe. Ich werde ihn daher ausschliessen und das Folgende auf die Voraussetzung gründen, dass P entweder für keinen Werth, oder nur für zwei Werthe von p verschwinden kann; unter welcher Voraussetzung, wie ich vorher bemerkt habe, wenigstens in einem der beiden von p abhängigen Factoren von PP, die Summe der Quadrate der Coefficienten von $\cos p$ und $\sin p$ kleiner ist als $(a+g)^2$.

Ich werde also die Substitution einer neuen unbestimmten Grösse, statt p, so wählen, dass sie auf reelle Formeln führt, wenn diese Bedingung durch einen der beiden von p abhängigen Factoren von (45), und zwar durch den zuletzt geschriebenen, erfüllt wird. Da die Zeichen

von R und R' willkürlich bleiben und nur aus (49) hervorgeht, ob beide gleich oder verschieden anzunehmen sind, so kann unter dem zuletzt geschriebenen Factor immer der von beiden verstanden werden, für welchen die Summe der Quadrate der Coefficienten von $\cos p$ und $\sin p$ den kleineren Werth hat. Man kann also *immer reelle* Winkel n und m durch die Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\sin n \cos m &= \frac{b-R}{a+g}\\ \sin n \sin m &= \frac{c-R'}{a+g}\end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots (50)$$

bestimmen, in welchen $\sin n$ positiv angenommen werden kann, und durch deren Einführung

$$a+g+(b-R)\cos p+(c-R')\sin p=(a+g)\,[1+\sin n\cos(p-m)]$$

wird.

Führt man nun, statt des unbestimmten p, einen anderen Winkel u in die Betrachtung ein, der mit dem ersteren durch die Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\cos(p-m) &= \frac{\cos u-\sin n}{1-\sin n\cos u}\\ \sin(p-m) &= \frac{\cos n\,.\sin u}{1-\sin n\cos u}\end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots (51)$$

verbunden ist, so wird dadurch

$$1+\sin n\cos(p-m)=\frac{\cos n^2}{1-\sin n\cos u}$$

und also auch

$$\frac{1}{a+g}[a+g+(b-R)\cos p+(c-R')\sin p]=\frac{\cos n^2}{1-\sin n\cos u} \dots\dots\dots (52)$$

Der noch übrige Factor von PP kann

$$a+g+[(b+R)\cos m+(c+R')\sin m]\cos(p-m)-[(b+R)\sin m-(c+R')\cos m]\sin(p-m)$$

geschrieben werden, und verwandelt sich durch die Substitution (51) in:

$$\left.\begin{aligned}&a+g-(b+R)\sin n\cos m-(c+R')\sin n\sin m\\ &+[(b+R)\cos m+(c+R')\sin m-(a+g)\sin n]\cos u\\ &-[(b+R)\sin m-(c+R')\cos m]\cos n\sin u\end{aligned}\right\} : (1-\sin n\cos u)$$

und durch die aus (50) hervorgehenden Ausdrücke:

$$b\cos m+c\sin m=R\cos m+R'\sin m+(a+g)\sin n$$
$$b\sin m-c\cos m=R\sin m-R'\cos m$$

in:

$$\frac{a+g-\dfrac{bb-RR+cc-R'R'}{a+g}+2(R\cos m+R'\sin m)\cos u-2(R\sin m-R'\cos m)\cos n\sin u}{1-\sin n\cos u}$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes wird durch (48) in

$$3g + a - d - f$$

oder, da $d+f-a=A$ ist (47), in

$$3g - A$$

verwandelt. Der Ausdruck (38) hat daher, durch die Einführung des unbestimmten Winkels u die Form:

$$PP = \frac{\cos n^2 \left\{3g - A + 2(R\cos m + R'\sin m)\cos u - 2(R\sin m - R'\cos m)\cos n \sin u\right\}}{(1-\sin n \cos u)^2} \quad (53)$$

angenommen.

Die durch die Formeln (51) ausgedrückte Relation zwischen $p-m$ und u, durch welche diese Verwandlung erlangt worden ist, ist dieselbe, welche zwischen der wahren und der excentrischen Anomalie in einer Ellipse stattfindet, deren Excentricität $=\sin n$ ist *). Sie kann auch in der bekannten Form:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p-m) = \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}n) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (54)$$

dargestellt werden.

13.

Der Ausdruck (53) von PP wird noch einfacher, wenn man darin nicht allein die durch g bezeichnete Wurzel der cubischen Gleichung (47), sondern auch ihre übrigen Wurzeln, welche ich durch g' und g'' bezeichnen werde, benutzt. Wenn nur eine ihrer Wurzeln reell ist, so versteht es sich von selbst, dass die geforderte Zerfällung von PP in zwei reelle Factoren nur erlangt wird, wenn g die reelle Wurzel bedeutet; allein wenn alle drei Wurzeln reell sind, so wird nöthig, zu untersuchen, *welche* von ihnen die durch g bezeichnete, die Zerfällung in zwei reelle Factoren ergebende ist. Ich werde daher die Beschaffenheit der Wurzeln der Gleichung (47) näher betrachten.

Zuerst werde ich zeigen, dass diese Gleichung, immer wenn ihr letztes Glied nicht verschwindet, eine negative Wurzel hat. Wenn man in ihrem letzten Gliede, nämlich in

$$-C = -bbf - ccd - eea + adf + 2bce$$

die Ausdrücke (40) von a, b, c u. s. w. substituirt und nach den Po-

*) *Jacobi* a. a. O. S. 324.

tenzen von $\sigma\sigma-1$ ordnet, so findet man, dass das in die erste Potenz dieser Grösse multiplicirte und das sie nicht enthaltende Glied verschwinden, die beiden übrigbleibenden Glieder aber

$$\frac{i^4(\sigma\sigma-1)^2}{1-ee}\left[xx+y'y'(1-ee\cos d^2)-2y's'ee\cos d\sin d+s's'(1-ee\sin d^2)-\sigma\sigma+1\right]$$

werden, und da der zwischen Klammern eingeschlossene Theil dieses Ausdruckes, den Formeln (39) zufolge:

$$=xx+(s\cos d-y\sin d)^2+\frac{(s\sin d+y\cos d)^2}{1-ee}-\sigma\sigma+1=1$$

ist, sich in

$$-C=\frac{i^4(\sigma\sigma-1)^2}{1-ee}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(55)$$

zusammenziehen. Wenn man aber die Ausdrücke (44) von $a, b, c, \ldots$, nämlich die Coefficienten des Ausdruckes von

$$P'P'=\frac{ss}{\sigma\sigma-1}PP$$

setzt, so erhält man, da $-C$ die dritte Dimension von $a, b, c, \ldots$ enthält dafür den Ausdruck

$$-C=\frac{i^4(\sigma\sigma-1)^2}{1-ee}\left(\frac{ss}{\sigma\sigma-1}\right)^3=\frac{i^4 ss}{(1-ee)(\sigma\sigma-1)}\ldots\ldots\ldots(55^*)$$

welcher, wenn, wie die Ausdrücke (44) voraussetzen, $\sigma\sigma>1$ ist, gleich dem vorigen, immer positiv ist. Ebenfalls wird er positiv wenn man die $\sigma\sigma<1$ voraussetzenden Ausdrücke (44*) der Coefficienten $a, b, c, \ldots$ von

$$P'P'=\frac{ss}{1-\sigma\sigma}PP$$

annimmt. Das letzte Glied der Gleichung (47) ist also, wenn es nicht verschwindet, in allen Fällen positiv, wesshalb sie, wenn nicht eine verschwindende, immer eine negative Wurzel, und falls ihre 3 Wurzeln reel sind, entweder noch zwei negative, oder zwei positive hat.

Die Wahl der Wurzel g der cubischen Gleichung bleibt willkürlich, wenn sie vor g' und g'' nicht dadurch ausgezeichnet wird, dass sie die einzige ist, welche eine Zerlegung von PP in zwei reelle Factoren ergiebt. Willkürlich bleibt sie, wenn der Gleichung $PP=o$ durch vier reelle Werthe von p genügegeleistet wird, in welchem — jedoch im vorigen § ausgeschlossenen — Falle die cubische Gleichung drei reelle Wurzeln hat und g jede von ihnen sein kann, weil jede

Combination der vier einfachen Factoren von PP zu zwei Paaren dann reel ist. Sie bleibt aber nicht willkürlich, wenn der Gleichung $PP=o$ durch zwei und durch vier imaginäre Werthe von p genügegeleistet wird. In dem ersten Falle ist g die einzige reelle Wurzel der cubischen Gleichung; in dem zweiten ist sie unter den drei dann reellen Wurzeln die, welche allein eine Zerlegung von PP in zwei reelle Factoren (45) ergiebt. Diese Bedingung fordert, dass

$$RR=bb-(a+g)(d-g) \text{ und } R'R'=cc-(a+g)(f-g)$$

positiv, die ähnlichen Ausdrücke, in welchen g' oder g'' statt g geschrieben werden, z. B.

$$bb-(a+g')(d-g') \text{ und } cc-(a+g')(f-g')$$

aber negativ sind, und zwar beide negativ, weil sonst das Product ihrer Quadratwurzeln, welches, zufolge (49), für jeden reellen Werth der angewandten Wurzel reel ist, imaginär sein würde. Hieraus geht hervor, dass

$$(a+g')(d-g')-(a+g)(d-g) \text{ und } (a+g')(f-g')-(a+g)(f-g)$$

oder............ $(g'-g)(d-a-g-g')$ und $(g'-g)(f-a-g-g')$

oder, wegen $d+f-a=g+g'+g''$,

$$(g'-g)(g''-f) \text{ und } (g'-g)(g''-d)$$

positiv, die drei Grössen

$$g'-g,\ g''-f,\ g''-d$$

also von gleichem Zeichen sind. Aus demselben Grunde müssen auch

$$g''-g,\ g'-f,\ g'-d$$

gleiches Zeichen haben. Aber auch das gemeinschaftliche Zeichen der drei ersten Grössen muss dasselbe sein, welches die drei letzten haben; denn wenn beide verschieden wären, müssten $g''-g-(g'-g)=g''-g'$ und $g'-f-(g''-f)=g'-g''$ gleiches Zeichen haben, was nur im Falle des Verschwindens von $g''-g'$ nicht widersprechend ist, in welchem Falle jedoch die drei ersten und die drei letzten Grössen nicht im Zeichen allein, sondern völlig übereinstimmen. Hieraus folgt, dass wenn nicht alle drei Wurzeln der cubischen Gleichung einander gleich sind, g'' und g', beide entweder kleiner oder grösser sind, nicht nur als g, sondern auch als d und als f.

Man kann nun zeigen, dass die Wurzel g der cubischen Gleichung, wenn die Spitze des Schattenkegels sich ausserhalb der Erde befindet negativ ist, wenn innerhalb der Erde positiv. Wenn der Schattenkegel ganz ausserhalb der Erde ist, muss PP für keinen Werth von p positiv werden können, was nur stattfinden kann wenn das von p unabhängige Glied des Ausdruckes (53), nämlich $3g - A = 2g - g' - g''$ negativ ist. In diesem Falle sind also $g - g'$ und $g - g''$ negativ, oder g ist die kleinste der drei reellen Wurzeln, also, da wenigstens eine von ihnen negativ ist, jedenfalls negativ. Wenn der Schattenkegel zum Theil von der Erde umschlossen ist, hat die cubische Gleichung nur eine reelle Wurzel, von welcher wir schon wissen dass sie negativ ist. Wenn er, endlich, ganz von der Erde umschlossen ist, kann die in den beiden vorigen — immer vor dem gegenwärtigen Falle vorangehenden, und auf ihn folgenden — Fällen negative Wurzel g, ihr Zeichen nur geändert haben, wenn sie vorher verschwunden ist, wenn also auch das Product der drei Wurzeln verschwunden ist, was, seinem Ausdrucke (55) gemäss, nur geschehen kann indem $\sigma\sigma = 1$ wird, oder die Spitze des Schattenkegels durch die Oberfläche der Erde geht. Wenn die Spitze des Schattenkegels, während des Verlaufes einer Finsterniss, nicht in das Innere der Erde gelangt, kann also auch g nur negativ sein. — In dem entgegengesetzten Falle muss g positiv sein, wenn gezeigt werden kann, dass dann nicht alle drei Wurzeln der cubischen Gleichung negativ sein können. Denn immer wenn der Schattenkegel ganz von der Erde umschlossen ist, also auch immer wenn seine Spitze sich in ihrem Inneren befindet, ist das von p unabhängige Glied des Ausdruckes (53) positiv, woraus folgt, dass g dann die grösste der drei Wurzeln, also, wenn nicht alle negativ sind, jedenfalls positiv ist. Wenn man die Ausdrücke (40) der Coefficienten von PP in dem Ausdrucke des zweiten Coefficienten der cubischen Gleichung, nämlich

$$B = bb + cc - ee - a(d+f) + df$$

substituirt, so findet man, dass ihr nicht in $\sigma\sigma - 1$ multiplicirter Theil verschwindet, die übrigen Theile aber, nach einigen leichten, auf den Formeln (39) beruhenden Reductionen, sich in

$$B = -\frac{ii(1-\sigma\sigma)}{1-ee}\left\{(1-ee\cos d)^2 + ss(1+ii) + \frac{ee}{1-ee}(s\sin d + y\cos d)^2 + (1-\sigma\sigma) - ii(1-ee\sin d^2)\right\}$$

zusammenziehen. Wenn $\sigma\sigma < 1$ ist, oder die Spitze des Schattenkegels

sich im Inneren der Erde befindet, ist nur das letzte Glied des zwischen Klammern eingeschlossenen Theils dieses Ausdruckes negativ, allein es ist kleiner als das erste Glied allein, da ii immer ein sehr kleiner Bruch ist; B selbst ist also negativ, womit erwiesen ist, dass die cubische Gleichung, in dem gegenwärtigen Falle nicht drei negative Wurzeln haben kann, also auch g positiv sein muss. Da schon bekannt geworden ist, dass sie nie eine positive Wurzel allein haben kann, so geht auch hervor, dass, in dem gegenwärtigen Falle, auch eine der Wurzeln g' und g'' positiv sein muss, während die andere negativ ist. — Alles zusammengenommen, was ich jetzt von der Wurzel g der cubischen Gleichung gesagt habe, lässt ihre Wahl nie zweifelhaft. Wenn die Spitze des Schattenkegels ausserhalb der Erde ist, ist sie immer negativ; wenn diese Spitze innerhalb der Erde ist, positiv. Wenn der Schattenkegel ganz ausserhalb der Erde ist, ist sie die kleinste unter den drei reellen Wurzeln; wenn er ganz von der Erde umschlossen ist, ist sie die grösste. Wenn, in diesem Falle, seine Spitze ausserhalb der Erde ist, ist sie selbst negativ, also unter den drei dann negativen Wurzeln, der absoluten Grösse nach die kleinste; wenn diese Spitze innerhalb der Erde ist, ist g die grösste von zwei positiven Wurzeln. Der Vollständigkeit wegen bemerke ich noch, dass in dem Momente des Durchganges der Spitze des Schattenkegels durch die Oberfläche der Erde, zwei Wurzeln der cubischen Gleichung zugleich verschwinden und dass g eine von ihnen ist.

Man kann auch Grenzen angeben, zwischen welchen die Wurzel g liegen muss. Erhebt man die immer reelle Grösse $bR'-cR$ zum Quadrate, und substituirt man für RR, $R'R'$, RR' ihre Ausdrücke (48) und (49), so wird dieses Quadrat:

$$= (a+g)\,[2bce - bb(f-g) - cc(d-g)]$$

oder, der Gleichung (46) zufolge, welcher $x=g$ genügeleistet,

$$(bR'-cR)^2 = (a+g)^2\,[ee-(d-g)(f-g)] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

Da dieser Ausdruck also positiv sein muss, welches nur für Werthe von g die zwischen den Grenzen

$$\tfrac{1}{2}(d+f) - \sqrt{[ee+\tfrac{1}{4}(d-f)^2]} \text{ und } \tfrac{1}{2}(d+f) + \sqrt{[ee+\tfrac{1}{4}(d-f)^2]}$$

liegen stattfindet, so sind diese Grenzen die Grenzen von g. Wenn e verschwindet, verwandeln sie sich in d und f, zwischen welchen Grössen also dann g liegt.

14.

Ich kehre wieder zu dem Ausdrucke (53) von PP zurück. Setzt man darin

$$\left.\begin{aligned} R^0 \cos m^0 &= R\cos m + R'\sin m \\ R^0 \sin m^0 &= (-R\sin m + R'\cos m)\cos n \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (57)$$

so wird er

$$PP = \frac{\cos n^2\,[3g - A + 2R^0\cos(u-m^0)]}{(1-\sin n\cos u)^2}$$

und das jetzt eingeführte R^0 kann durch die drei Wurzeln der cubischen Gleichung sehr einfach ausgedrückt werden. Wenn man nämlich in dem Ausdrucke

$$R^0R^0 = (R\cos m + R'\sin m)^2 + (R\sin m - R'\cos m)^2\cos n^2$$

$1-\sin n^2$ statt $\cos n^2$ schreibt, nimmt er die Form

$$R^0R^0 = RR + R'R' - (R\sin m - R'\cos m)^2\sin n^2$$

an, welche durch die Substitution der Ausdrücke (50) von $\sin n\cos m$ und $\sin n\sin m$ in:

$$R^0R^0 = RR + R'R' - \frac{(bR'-cR)^2}{(a+g)^2}$$

und durch (48) und (56) in:

$$R^0R^0 = bb + cc - ee - a(d+f) + df - 2(d+f-a)g + 3gg$$

verwandelt wird. Der von g unabhängige Theil dieses Ausdruckes ist der zweite Coefficient der Gleichung (47), der in $-2g$ multiplicirte ihr erster; jener ist also $= gg' + gg'' + g'g''$, dieser $= g + g' + g''$. Man hat also

$$R^0R^0 = gg' + gg'' + g'g'' - 2g(g+g'+g'') + 3gg = (g-g')(g-g'') \ldots\ldots (58)$$

und, da auch $3g - A = 2g - g' - g''$ ist, die einfachste Form des Ausdruckes von PP:

$$PP = \frac{\cos n^2\,[2g - g' - g'' + 2\sqrt{(g-g'.g-g'')}\cos(u-m^0)]}{(1-\sin n\cos u)^2}$$

oder, wenn man $u - m^0$ als unbestimmten Winkel einführen und ihn durch η bezeichnen will,

$$P = \frac{\cos n\sqrt{[2g - g' - g'' + 2\sqrt{(g-g'.g-g'')}\cos\eta]}}{1-\sin n\cos(\eta+m^0)} \ldots\ldots (59)$$

Um imaginäre Grössen, auch wenn g' und g'' solche sind, zu vermeiden, kann man das immer reelle Quadrat von $g'' - g'$ in diesen Ausdruck einführen, wodurch er die Gestalt:

$$P = \frac{\cos n}{1-\sin n\cos(\eta+m^0)}\sqrt{[3g - A + \cos\eta\sqrt{((3g-A)^2 - (g''-g')^2)}]} \ldots (60)$$

annimmt, welche auch unmittelbar zeigt, dass P verschwinden oder nicht verschwinden kann, jenachdem $(g''-g')^2$ negativ oder positiv ist, oder jenachdem die cubische Gleichung zwei imaginäre, oder nur reelle Wurzeln hat. —

Offenbar gilt Alles, was in den letzten §§ von P gesagt ist, auch von P', indem beide in einem von p unabhängigen Verhältnisse zueinander sind.

15.

Um den willkürlichen Winkel p ganz aus der Betrachtung zu schaffen, müssen auch die, noch ausser P in den Ausdrücken von u, v, w vorkommenden, von p abhängigen Grössen, durch den neuen willkürlichen Winkel η ausgedrückt werden. Ich werde die Formeln mittheilen, durch welche der Ersatz von p durch η erlangt wird.

Schreibt man statt $\cos p$ und $\sin p$:

$$\cos p = \cos m \cos(p-m) - \sin m \sin(p-m)$$
$$\sin p = \sin m \cos(p-m) + \cos m \sin(p-m)$$

und wendet man dann die Substitution (51) an, so erhält man:

$$\cos p = \frac{-\sin n \cos m + \cos m \cos(\eta+m^0) - \cos n \sin m \sin(\eta+m^0)}{1-\sin n \cos(\eta+m^0)}$$
$$\sin p = \frac{-\sin n \sin m + \sin m \cos(\eta+m^0) + \cos n \cos m \sin(\eta+m^0)}{1-\sin n \cos(\eta+m^0)}$$

oder

$$\cos p = \frac{-\nu+\nu'\cos\eta+\nu''\sin\eta}{\mu-\mu'\cos\eta-\mu''\sin\eta}$$
$$\sin p = \frac{-\xi+\xi'\cos\eta+\xi''\sin\eta}{\mu-\mu'\cos\eta-\mu''\sin\eta}$$

wo die eingeführten Zeichen folgende Bedeutung haben:

$$\left.\begin{aligned}
\mu &= 1\\
\mu' &= \sin n \cos m^0\\
\mu'' &= -\sin n \sin m^0\\
\nu &= \sin n \cos m\\
\nu' &= \cos m \cos m^0 - \cos n \sin m \sin m^0\\
\nu'' &= -\cos m \sin m^0 - \cos n \sin m \cos m^0\\
\xi &= \sin n \sin m\\
\xi' &= \sin m \cos m^0 + \cos n \cos m \sin m^0\\
\xi'' &= -\sin m \sin m^0 + \cos n \cos m \cos m^0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (61)$$

Diese Ausdrücke von $\cos p$ und $\sin p$ müssen in den Ausdrücken von u, v, w substituirt werden. Am einfachsten werden die ganz von η abhängig gemachten Ausdrücke von u, v, w wenn man von den Formeln (32) und (32*) ausgeht, welche, ausser in P', nur die erste Dimension von $\cos p$ und $\sin p$ enthalten, und daher, nachdem man sie in den gemeinschaftlichen Nenner der von η abhängig gemachten Ausdrücke, sowohl dieser Grössen als von P', multiplicirt hat, offenbar die folgende Gestalt annehmen:

$$\left.\begin{aligned}[D+D'\cos\eta+D''\sin\eta+D'''\Pi]\,u &= A+A'\cos\eta+A''\sin\eta+A'''\Pi\\ [D+D'\cos\eta+D''\sin\eta+D'''\Pi]\,v &= B+B'\cos\eta+B''\sin\eta+B'''\Pi\\ [D+D'\cos\eta+D''\sin\eta+D'''\Pi]\,w &= C+C'\cos\eta+C''\sin\eta+C'''\Pi\end{aligned}\right\}\ldots(62)$$

worin A, A', ..., B, B' u. s. w. von η unabhängig sind und Π für

$$\sqrt{[2g-g'-g''+2\sqrt{(g-g'.g-g'')}\cos\eta]}$$

geschrieben ist. Weniger einfach werden die den Formeln (24) entsprechenden Ausdrücke, indem diese Formeln in der Grösse m'' schon die zweite Dimension von $\cos p$ und $\sin p$ enthalten und daher ihre Umformung in η auch die zweite Dimension von $\cos\eta$ und $\sin\eta$ enthalten muss. Will man auch den Positionswinkel des Berührungspunkts der Ränder am Punkte Z, für den durch u, v, w bestimmten Punkt der Erde kennen lernen, so erhält man ihn durch die Formel (54), welche nun

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(p-m)=\operatorname{tang}(45^0+\tfrac{1}{2}n)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\eta+m^0)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (63)$$

wird.

Ich habe hier nur der *Form* der ganz von η abhängig gemachten Ausdrücke von u, v, w erwähnt, ohne die Ausdrücke ihrer Coefficienten anzugeben. In jener Form erscheint die Auflösung der *Aufgabe I.* in ihrer einfachsten Gestalt, allen für die Anwendungen wird man vorziehen, die Aufsuchung der Werthe von μ, ν, ξ, u. s. w. und von A, A', ... B, B', ... u. s. w. zu vermeiden, welches, wenn η gegeben ist, nur die Aufsuchung von p nach der Formel (63) und seine Anwendung in den Formeln des 7[ten] und 8[ten] §'s fordert.

16.

Die Coefficienten a, b, c (40) haben eine Eigenschaft, deren Benutzung zur Erleichterung der Anwendung der gegebenen Vorschriften wesentlich beiträgt, und daher hier geltend gemacht werden muss. Sie

hängen von x, y, s, l, d ab, von welchen Grössen, während des Verlaufes einer Finsterniss, die beiden ersten sich der Zeit nahe proportional änderen, die drei letzten aber nur geringe Änderungen erfahren. Da sie ganze rationale Functionen dieser Grössen sind, so sind sie auch näherungsweise solche Functionen der Zeit, wesshalb eine Reihe ihrer Werthe, für in arithmetischer Progression fortgehende Zeiten berechnet, wenn sie nur die dem Grade dieser Functionen angemessene Zahl von Gliedern besitzt, auch unabhängig von der Voraussetzung *kleiner* Änderungen der Zeit, muss interpolirt werden können. Wenn man die Zusammensetzung der Ausdrücke (40) betrachtet, so bemerkt man, dass der Grad der ihnen näherungsweise gleichen Functionen der Zeit, für a der 2^{te}, für b, c der 1^{te}, für d, e, f der 0^{te} ist; welches unter der, sich in allen vorkommenden Fällen bewährenden Voraussetzung gilt, dass $iixx$, $iixy$, $iiyy$ sehr kleine Grössen sind. Von den Ausdrücken (44) und (44*) der Coefficienten der Entwickelung von $P'P'$ kann Ähnliches bemerkt werden. Ich werde den Fall voraussetzen, von welchem nur bei den inneren Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes eine Ausnahme vorkommen kann, nämlich den Fall einer, vergleichungsweise mit x und y sehr grossen Entfernung der Spitze des Schattenkegels von der Erde, in welchem Falle h und k *kleine*, sich nahe der Zeit proportional ändernde Grössen sind, und die kleine Grösse q, in Beziehung auf die Zeit, nahe von der zweiten Ordnung ist. In dem Coefficienten a ist $xx + \varrho\varrho yy$ näherungsweise von der zweiten Ordnung, und qq eine *kleine* Grösse der 4^{ten}: die Reihe der Werthe von a muss daher nahe beständige zweite, und weit näher beständige vierte Differenzen haben. Die Coefficienten b, c haben, aus ähnlichem Grunde, nahe beständige erste, und weit näher beständige dritte Differenzen; d, e, f haben sehr nahe beständige zweite Differenzen. Man kann daher a, b, c, d, e, f, für jede Zeit während des Verlaufes einer Finsterniss, als bekannt annehmen, wenn man ihre Werthe für *fünf* Momente berechnet hat, welche übrigens so gewählt werden müssen, wie die Sicherheit der Interpolationen im Allgemeinen fordert, d. h. so, dass der ganze Verlauf zwischen ihren äussersten enthalten ist. Wenn man diese Berechnung für die 7 Zeitmomente macht, für welche die im 4^{ten} § mitgetheilten Zahlen gelten, so ist sie daher mehr als genügende Grundlage der Interpolationen.

Dieser Eigenschaft der Coefficienten *a, b, c* ist es angemessen, ihre Werthe nicht für jede Zeit, für welche man sie gebraucht, sondern einfürallemal für dieselben Zeitmomente, für welche man die Elemente einer Finsterniss aufgesucht hat (§. 4), aus diesen zu berechnen. Ich werde daher das von der Sonnenfinsterniss am 15. May 1836 hergenommene Beispiel, jedoch nur in Beziehung auf die *äussere* Berührung der Ränder hier fortsetzen, indem ich den Formeln (26), (33), (35) und (44) folge.

Unter der Annahme des Axenverhältnisses der Erde = 300,7047 : 299,7047, oder

$$\log \sqrt{(1-ee)} = 9{,}9985533{,}3;\ \log ee = 7{,}8221670$$

findet man, für die Zeitmomente, für welche die Angaben §. 4 gelten:

log. σ	δ	ε	log. ϱ	δ'
2,0868335	18° 57′ 49″,20	− 43′ 58″,183	0,0012948	18° 52′ 34″,34
69027	19 3 17,57	− 30 26,123	46	53 8,01
69635	8 45,40	− 16 54,138	45	53 41,65
70167	14 12,72	− 3 22,224	43	54 15,26
70623	19 39,52	+ 10 9,619	42	54 48,85
71006	25 5,82	+ 23 41,388	40	55 22,40
71311	30 31,63	+ 37 13,085	39	55 55,92

Ferner findet man die Werthe der §. 11 eingeführten kleinen Grössen *h, k, q*:

q	k	h
+ 0,0116948	+ 0,0015265	− 0,0127904
+ 0,0017159	+ 0,0029552	− 0,0088535
− 0,0039824	+ 0,0043816	− 0,0049168
− 0,0054013	+ 0,0058056	− 0,0009805
− 0,0025427	+ 0,0072271	+ 0,0029556
+ 0,0045912	+ 0,0086462	+ 0,0068913
+ 0,0159969	+ 0,0100629	+ 0,0108265

Der Logarithme von $\sin\lambda$ ist das arithmetische Complement des schon angeführten log. σ; log. $\sec\lambda$ erfährt, während der Zeit welche die mitgetheilten Zahlen umfassen, in der 7ten Decimalstelle keine Veränderung und ist = 0,0000146; log. $\tang\lambda$ ist daher = Compl. arithm. $\log\sigma + 0{,}0000146$. — Man kann auch die bei der Anwendung der Formeln (35) nothwendigen

$$\log. \varrho \sin\delta',\ \log \varrho\cos\delta',\ \sin\varepsilon\sec\lambda,\ \cos\varepsilon\cos\delta\sec\lambda,\ \cos\varepsilon\sin\delta\sec\lambda$$

für die 7 Zeitmomente aufsuchen und leicht dazwischen interpoliren.

Die Werthe der Coefficienten des Ausdruckes von $P'P'$ sind, den Formeln (44) gemäss:

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
— 1,443948	— 0,035838	— 0,881503	— 0,3204167	— 0,0000062	— 0,3184605
— 0,181852	+ 0,062898	— 0,610438	5364	— 0,0000084	6089
+ 0,557842	+ 0,161538	— 0,339126	6317	— 0,0000069	7244
+ 0,774840	+ 0,260054	— 0,067641	7028	— 0,0000017	8074
+ 0,469105	+ 0,358419	+ 0,203941	7503	+ 0,0000068	8582
— 0,359146	+ 0,456604	+ 0,475544	7741	+ 0,0000191	8769
— 1,709446	+ 0,554582	+ 0,747091	7740	+ 0,0000348	8633

17.

Ich muss hier Einiges über das *Interpoliren* sagen. Zuerst werde ich an ein Paar Beispielen zeigen, in wiefern die im vorigen § bemerkte Eigenschaft der Coefficienten *a*, *b*, *c*,..... sich in ihren eben mitgetheilten Zahlenwerthen bestätigt:

a	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
— 1,443948				
	+ 1,262096			
— 0,181852		— 522402		
	+ 0,739694		— 294	
+ 0,557842		— 522696		+ 257
	+ 0,216998		— 37	
+ 0,774840		— 522733		+ 254
	— 0,305735		+ 217	
+ 0,469105		— 522516		+ 250
	— 0,828251		+ 467	
— 0,359146		— 522049		
	— 1,350300			
— 1,709446				

b	Δ_1	Δ_2	Δ_3
— 0,035838			
	+ 98736		
+ 0,062898		— 96	
	+ 98640		— 28
+ 0,161538		— 124	
	+ 98516		— 27
+ 0,260054		— 151	
	+ 98365		— 29
+ 0,358419		— 180	
	+ 98185		— 27
+ 0,456604		— 207	
	+ 97978		
+ 0,554582			

Die vortheilhaftsten Interpolationsformeln — die *Newton*schen — sind bekanntlich die folgenden:

Fall I. *zwei* Werthe der zu interpolirenden Grösse und jeder ungeraden Differenz, und *ein* Werth jeder geraden Differenz sind gegeben:

Schema.

Arg.	ft	$\Delta_{,}$	Δ_2	Δ_3	Δ_4	
$-\frac{1}{2}$	$a_{,}$		$c_{,}$		$e_{,}$	
		b		d		u. s. w.
$+\frac{1}{2}$	a'		c'		e'	

$$2a = a_{,} + a',\ 2c = c_{,} + c',\ 2e = e_{,} + e',\ \text{u. s. w.}$$

$$ft = a + t.b + \frac{tt - \frac{1}{4}}{2}.c + \frac{t.tt - \frac{1}{4}}{2.3}.d + \frac{tt - \frac{1}{4}.tt - \frac{9}{4}}{2.3.4}.e + \frac{t.tt - \frac{1}{4}.tt - \frac{9}{4}}{2.3.4.5}.f + \ldots$$

Fall II. *ein* Werth der zu interpolirenden Grösse und jeder geraden Differenz, und *zwei* Werthe jeder ungeraden Differenz sind gegeben:

Schema.

Arg.	ft	$\Delta_{,}$	Δ_2	Δ_3	Δ_4	
		$b_{,}$		$d_{,}$		
0	a		c		e	u. s. w.
		b'		d'		

$$2b = b_{,} + b',\ 2d = d_{,} + d',\ \text{u. s. w.}$$

$$ft = a + t.b + \frac{tt}{2}.c + \frac{t.tt - 1}{2.3}d + \frac{tt.tt - 1}{2.3.4}e + \frac{t.tt - 1.tt - 4}{2.3.4.5}f + \ldots$$

Diese Formeln sind am vortheilhaftsten wenn t innerhalb $\pm\frac{1}{2}$ genommen wird, was immer geschehen kann, wenn die gegebenen Werthe von ft unbestimmt weit nach Oben und Unten fortgehen und daher keine der als bekannt vorausgesetzten Grössen $a, b, c, d, \ldots$ fehlen. Wenn aber, wie häufig, und auch bei der jetzigen Anwendung, der Fall ist, nur eine begrenzte Reihe von Werthen von ft gegeben ist, und daher von $a, b, c, d \ldots$, am Anfange und Ende derselben, nur mehr oder wenigere der früheren vorhanden sind, muss entweder t von der ersten vollständig vorhandenen Reihe der $a, b, c \ldots$ bis zum Anfange zurück, und von der letzten bis zum Ende vorwärts gezählt; oder wenn t immer zwischen $\mp\frac{1}{2}$ bleiben soll, müssen die fehlenden Glieder der Reihe der $a, b, c \ldots$, am Anfange durch die *höchsten*, am Ende durch die *niedrigsten* der in den Differenzreihen vorhandenen Zahlen ersetzt werden. Die dann anzuwendenden, den *Newton*schen so weit als möglich folgenden Formeln werde ich mittheilen. Um sie kurz schreiben zu können, werde ich das Product einer Reihe, in arithmetischer Progression, von 1 zu 1 fortgehender Factoren, deren erster $t+a$, der letzte $t+b$ ist, durch $[a, b]$ bezeichnen, z. B.

$$t-3\,.\,t-2\,.\,t-1\,.\,t\,.\,t+1 \text{ durch } [-3,1] \text{ oder } [1,-3]$$
$$t-\tfrac{5}{2}\,.\,t-\tfrac{3}{2}\,.\,t-\tfrac{1}{2}\,.\,t+\tfrac{1}{2} \text{ durch } [-\tfrac{5}{2},\tfrac{1}{2}] \text{ oder } [\tfrac{1}{2},-\tfrac{5}{2}]$$

das Product $2.3.4\ldots n$ aber durch $[n]$; so dass z. B. die beiden *Newton*schen Interpolationsformeln folgendermassen bezeichnet werden:

$$\text{I. } ft = a + t.b + \frac{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}{[2]}c + t.\frac{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}{[3]}d + \frac{[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]}{[4]}e + t.\frac{[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]}{[5]}f + \ldots.$$
$$\text{II. } ft = a + t.b + \frac{tt}{[2]}c + \frac{[-1,1]}{[3]}d + \frac{t[-1,1]}{[4]}e + \frac{[-2,2]}{[5]}f + \ldots.$$

Dieser Bezeichnung gemäss hat man, wenn man für die *Newton*schen Formeln, in beiden Fällen, um abzukürzen

$$a + N^{(1)}b + N^{(2)}c + N^{(3)}d + N^{(4)}e + \ldots.$$

schreibt:

Fall I.

Am Anfange fehlen	
c, und die folgenden	$a + N^{(1)}b + N^{(2)}\Delta_2 + \frac{[\frac{1}{2},-\frac{3}{2}]}{[3]}\Delta_3 + \frac{[\frac{1}{2},-\frac{5}{2}]}{[4]}\Delta_4 + \ldots.$
e, — —	$a + N^{(1)}b + N^{(2)}c + N^{(3)}d + N^{(4)}\Delta_4 + \frac{[\frac{3}{2},-\frac{5}{2}]}{[5]}\Delta_5 + \frac{[\frac{3}{2},-\frac{7}{2}]}{[6]}\Delta_6 + \ldots.$
g, — —	$a + N^{(1)}b + N^{(2)}c + N^{(3)}d + N^{(4)}e + N^{(5)}f + N^{(6)}\Delta_6 + \frac{[\frac{5}{2},-\frac{7}{2}]}{[7]}\Delta_7 + \ldots.$

u. s. w.

Am Ende fehlen	
g' und die folgenden	$a + N^{(1)}b + N^{(2)}c + N^{(3)}d + N^{(4)}e + N^{(5)}f + N^{(6)}\Delta_6 + \frac{[-\frac{5}{2},\frac{7}{2}]}{[7]}\Delta_7 + \ldots.$
e' — —	$a + N^{(1)}b + N^{(2)}c + N^{(3)}d + N^{(4)}\Delta_4 + \frac{[-\frac{3}{2},\frac{5}{2}]}{[5]}\Delta_5 + \frac{[-\frac{3}{2},\frac{7}{2}]}{[6]}\Delta_6 + \ldots.$
c' — —	$a + N^{(1)}b + N^{(2)}\Delta_2 + \frac{[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]}{[3]}\Delta_3 + \frac{[-\frac{1}{2},\frac{5}{2}]}{[4]}\Delta_4 + \ldots.$

Fall II.

Am Anfange fehlen	
b, und die folgenden	$a + N^{(1)}\Delta_1 + \frac{[0,-1]}{[2]}\Delta_2 + \frac{[0,-2]}{[3]}\Delta_3 + \frac{[0,-3]}{[4]}\Delta_4 + \ldots.$
d, — —	$a + N^{(1)}b + N^{(2)}c + N^{(3)}\Delta_3 + \frac{[1,-2]}{[4]}\Delta_4 + \frac{[1,-3]}{[5]}\Delta_5 + \ldots.$
f, — —	$a + N^{(1)}b + N^{(2)}c + N^{(3)}d + N^{(4)}e + N^{(5)}\Delta_5 + \frac{[2,-3]}{[6]}\Delta_6 + \ldots.$

u. s. w.

Am Ende fehlen	
f' und die folgenden	$a + N^{(1)}b + N^{(2)}c + N^{(3)}d + N^{(4)}e + N^{(5)}\Delta_5 + \frac{[-2,3]}{[6]}\Delta_6 + \ldots.$
d' — —	$a + N^{(1)}b + N^{(2)}c + N^{(3)}\Delta_3 + \frac{[-1,2]}{[4]}\Delta_4 + \frac{[-1,3]}{[5]}\Delta_5 + \ldots.$
b' — —	$a + N^{(1)}\Delta_1 + \frac{[0,1]}{[2]}\Delta_2 + \frac{[0,2]}{[3]}\Delta_4 + \frac{[0,3]}{[4]}\Delta_4 + \ldots.$

Bekanntlich wird die Anwendung der Interpolationsformeln am leichtsten, wenn man ihre früheren Glieder, nach und nach, durch die Berücksichtigung der späteren verändert. Damit man die Formeln, welche zur Ausführung der in der gegenwärtigen Abhandlung geforderten Interpolationen nöthig sind, hier beisammen finde, werde ich auch diese Änderung, unter der Voraussetzung, dass man nicht über die 4^ten^ Differenzen hinausgehe und dass man dem Falle I. gemäss verfahre, mittheilen:

1^te^ Zwischenzeit $d' = \Delta_3 + \frac{1}{4}(t - \frac{5}{2})\Delta_4$, $c' = \Delta_2 + \frac{1}{3}(t - \frac{3}{2})d'$, $b' = b + \frac{1}{2}t.c'$, $a' = a - \frac{1}{8}c'$

2^te^ $c' = c + \frac{1}{12}(tt - \frac{9}{4})\Delta_4$, $b' = b + \frac{1}{6}(tt - \frac{1}{4})d$, $a' = a + \frac{1}{2}(tt - \frac{1}{4})c'$

3^te^ $c' = c + \frac{1}{12}(tt - \frac{9}{4})e$, $b' = b + \frac{1}{6}(tt - \frac{1}{4})d$, $a' = a + \frac{1}{2}(tt - \frac{1}{4})c'$

u. s. w.

vorletzte — . . . $c' = c + \frac{1}{12}(tt - \frac{9}{4})\Delta_4$, $b' = b + \frac{1}{6}(tt - \frac{1}{4})d$, $a' = a + \frac{1}{2}(tt - \frac{1}{4})c'$

letzte — . . . $d' = \Delta_3 + \frac{1}{4}(t + \frac{5}{2})\Delta_4$, $c' = \Delta_2 + \frac{1}{3}(t + \frac{3}{2})d'$, $b' = b + \frac{1}{2}t.c'$, $a' = a - \frac{1}{8}c'$

Nachdem a' und b' hierdurch bekannt geworden sind, ist

$$ft = a' + t.b'$$

Die Differenzen einer Reihe von Zahlenwerthen einer Function convergiren, im Allgemeinen, nur am Anfange; später divergiren sie in Folge der begrenzten Annäherung der Zahlenwerthe selbst, aus welchen sie abgeleitet sind. Indem jeder dieser Werthe um eine halbe Einheit seiner letzten Decimalstelle fehlerhaft sein kann, kann jede Zahl der ersten Differenzreihe um eine Einheit, jede der zweiten um 2 Einheiten, jede der dritten um 4 u. s. w. fehlerhaft sein. Gewöhnlich werden zwar die Fehler nicht diese Grösse erlangen, indem gewöhnlich die Fehler der berechneten Reihe nicht so gross sein werden als sie sein können und indem auch die wirklich in ihr vorhandenen nicht leicht in der nachtheiligsten Ordnung aufeinander folgen werden; aber dennoch ist es weder nothwendig, noch im Allgemeinen vortheilhaft, eine Interpolationsformel bis zu einer Differenzreihe fortzusetzen, deren Zahlen aus der eben angegebenen Ursache gänzlich entstellt sein können. In dem ersten der beiden, am Anfange dieses §'s angeführten Fälle wird z. B. die Interpolation mit der 4^ten^, in dem zweiten mit der 3^ten^ Differenzreihe zu schliessen sein.

18.

Es kommen zwei, im Vorhergehenden schon an verschiedenen Orten voneinander getrennte Fälle von Finsternissen vor, welche nicht durchaus nach gleichen Vorschriften behandelt werden können, nämlich der Fall einer vergleichungsweise mit x und y sehr grossen Entfernung der Spitze des Schattenkegels von der Erde, und der Fall einer zu der Ordnung dieser Grössen zu zählenden. Jener ist der häufigere; dieser findet nur bei den inneren Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes statt. Um nicht fortwährend von dem einen zu dem anderen übergehen zu dürfen, werde ich den zweiten Fall jetzt ganz verlassen und erst gegen das Ende dieses Abschnitts, im 28ten §, zu ihm zurückkehren. Bis dahin wird also nur von der Verfolgung der Formeln (31), (32), (44) die Rede sein.

Verschiedene Theile des Vorhergehenden bedürfen einer weiteren Ausführung, welche ich in diesem § mittheilen werde. Zuerst werde ich die mir am leichtesten erscheinende Art, die Wurzel g der cubischen Gleichung (47) zu finden anführen. Ich habe im 13ten § gezeigt, dass sie zwischen den Grenzen

$$\tfrac{1}{2}(d+f) - \sqrt{[ee + \tfrac{1}{4}(d-f)^2]} \text{ und } \tfrac{1}{2}(d+f) + \sqrt{[ee + \tfrac{1}{4}(d-f)^2]}$$

liegt. Setzt man daher

$$g = \tfrac{1}{2}(d+f) + z$$

so ist z eine kleine Grösse, welche nicht ausserhalb der Grenzen $\pm\sqrt{[ee+\frac{1}{4}(d-f)^2]}$ liegt, und die Substitution dieses Ausdruckes der Wurzel verwandelt die cubische Gleichung, in ihrer Form (46), in:

$$0 = -\left(a + \frac{d+f}{2} + z\right)\left[ee + \tfrac{1}{4}(f-d)^2 - zz\right] + (bb+cc)z - (bb-cc)\frac{f-d}{2} + 2bce$$

welche auch:

$$z = \frac{\frac{1}{2}(bb-cc)(f-d) - 2bce + [a+\frac{1}{2}(f+d)]\,[ee+\frac{1}{4}(f-d)^2]}{bb+cc-ee-\frac{1}{4}(f-d)^2 + z[a+\frac{1}{2}(f+d)] + zz} \quad \ldots\ldots (64)$$

geschrieben werden kann. In dieser Form ist die Gleichung geeignet, z durch aufeinanderfolgende Näherungen kennen zu lehren, deren erste durch Weglassung des von z abhängigen Theils des Nenners erlangt wird. Jedoch verliert man diesen Vortheil, wenn $bb+cc$ eine kleine Grösse von der Ordnung von $f-d$ und e ist, welcher Fall übrigens nur wenn die Axe des Schattenkegels sehr nahe bei dem Mittelpunkte der Erde vorbeigeht, und auch dann nur während kurzer Zeit, eintreten kann.

Die hier vorkommenden Grössen haben die im 16[ten] § bemerkte Eigenschaft, so dass ihre, für die Zeitmomente, für welche die Angaben §. 4 und §. 16 gelten, berechneten Zahlenwerthe, wie dort interpolirt werden können. Ich werde die Gleichung abgekürzt durch

$$z = \frac{\mu}{\nu + \xi z + zz} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (64^*)$$

bezeichnen und die Werthe von μ, ν, ξ hiehersetzen:

μ	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
—0,0007600,7	+ 4036,5	— 1325,6	+ 69,0	— 54,5
— 3564,2	+ 2710,9	— 1256,6	+ 14,5	— 54,1
— 853,3	+ 1454,3	— 1242,1	— 39,6	— 54,1
+ 601,0	+ 212,2	— 1281,7	— 93,7	
+ 813,2	— 1069,5	— 1375,4		
— 256,3	— 2444,9			
— 2701,2				
ν				
0,7783302	— 4017399	+ 1662495	+ 3436	— 1867
0,3765903	— 2354904	+ 1665931	+ 1569	— 1867
0,1410999	— 688973	+ 1667500	— 298	— 1866
0,0722026	+ 978527	+ 1667202	— 2164	
0,1700553	+ 2645729	+ 1665038		
0,4346282	+ 4310767			
0,8657049				
ξ				
—1,763386,6	+1,261962,0	—522373,4	—294,3	+257,0
—0,501424,6	+0,739588,6	—522667,7	— 37,3	+254,1
+0,238164,0	+0,216920,9	—522705,0	+216,8	+250,6
+0,455084,9	—0,305784,1	—522488,2	+467,4	
+0,149300,8	—0,828272,3	—522020,8		
—0,678971,5	—1,350293,1			
—2,029264,6				

Wenn die Wurzel g der cubischen Gleichung bekannt ist, erhält man ihre beiden übrigen Wurzeln g' und g'' durch die Auflösung der Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 - Ax^2 + Bx - C - (g^3 - Ag^2 + Bg - C) \\ &= (x-g)\,[xx - (A-g)x + B - Ag + gg] \\ &= (x-g)\,[xx - (A-g)x + \frac{C}{g}] \end{aligned}$$

welcher, ausser $x = g$, auch

$$x = g' = \frac{A-g}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{A-g}{2}\right)^2 - \frac{C}{g}\right]}$$

$$x = g'' = \frac{A-g}{2} - \sqrt{\left[\left(\frac{A-g}{2}\right)^2 - \frac{C}{g}\right]}$$

genügeleisten. Indessen setzt der Ausdruck (60) von P, wofür nun P' geschrieben wird, nichtsowohl g' und g'', als das Quadrat ihres Unterschiedes bekannt voraus, welches aus den eben gegebenen Ausdrücken:

$$(g''-g')^2 = (A-g)^2 - \frac{4C}{g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

hervorgeht. Substituirt man dieses in jenem Ausdrucke, so wird er:

$$P' = \frac{\cos n}{1-\sin n \cos(\eta+m^\circ)} \sqrt{\left[3g-A+\cos\eta\, 2\sqrt{\left(g(2g-A)+\frac{C}{g}\right)}\right]} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

oder, wenn man, statt g, die kleine Grösse z einführt und $d+f-a$ für A schreibt:

$$P' = \frac{\cos n}{1-\sin n \cos(\eta+m^\circ)} \sqrt{\left[a+\tfrac{1}{2}(f+d)+3z+\cos\eta\, 2\sqrt{\left((\tfrac{1}{2}(f+d)+z)(a+2z)+\frac{C}{\tfrac{1}{2}(f+d)+z}\right)}\right]} \quad (67)$$

Um diese Formel anzuwenden, muss man, ausser z, die Werthe von

$$a+\tfrac{1}{2}(f+d),\ \tfrac{1}{2}(f+d),\ a,\ C$$

kennen. Der erste davon ist schon bei der Auflösung der cubischen Gleichung (64*) unter der Bezeichnung $\mathfrak{g}$ benutzt worden; sucht man ihn durch Interpolation aus seinen, schon mitgetheilten, Werthen für die 7 Zeiten, und $\frac{1}{2}(f+d)$ und C durch andere Interpolationen, so hat man Alles was die Formel als bekannt voraussetzt, indem a der Unterschied der beiden ersten Werthe ist. Die Interpolationen von $\frac{1}{2}(f+d)$ und C sind sehr wenig mühsam, da diese Grössen sich langsam änderen. Ich lasse die 7 Werthe von $\frac{1}{2}(f+d)$ und log. $-C$ hier folgen, so wie die ersteren aus den Angaben §. 16 und die letzteren aus der Formel (55*) hervorgehen.

$\frac{1}{2}(f+d)$			log. $-C$		
−0,3194386			9,0088002		
	−1341			+3642	
5727		+287	91644		−778
	−1054			+2864	
6781		+284	94508		−768
	−770			+2096	
7551		+278	96604		−760
	−492			+1336	
8043		+280	97940		−758
	−212			+578	
8255		+280	98518		−766
	+68			−188	
8187			98330		

Die Berechnungsart der Winkel n, m, m^0 bedarf gleichfalls einer weiteren Ausführung, indem die Kleinheit von $d-g$ und $f-g$ verursacht, dass R und R' wenig kleiner oder grösser sind als b und c und dass daher die Zähler der Formeln (50) im Allgemeinen weit kleiner sind als die Grössen, durch deren Unterschied sie gegeben werden; wovon die Folge ist, dass n und m durch diese Formeln weit weniger genau gefunden werden, als der in ihrer Berechnung angewandten Sorgfalt angemessen ist. Diese Unbequemlichkeit wird durch folgende Vorschriften vermieden, in welchen ich z, statt g, einführen, auch für $a+\frac{1}{2}(f+d)$ das dafür schon angewandte Zeichen ξ schreiben werde:

Fall.	I.	II.
$a+g=\xi+z$ u. $d-g=-\frac{1}{2}(f-d)-z$ haben	gleiches Zeichen	verschiedene Zeichen
dann wird ψ so bestimmt, dass . . .	$\sin\psi=\frac{\sqrt{-(\xi+z)(\frac{1}{2}(f-d)+z)}}{b}$	$\operatorname{tang}\psi=\frac{\sqrt{(\xi+z)(\frac{1}{2}(f-d)+z)}}{b}$
damit wird	$R=b\cos\psi$	$R=b\sec\psi$
und $\sin n\cos m$	$=\sqrt{\frac{-(\frac{1}{2}(f-d)+z)}{\xi+z}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi$	$=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(f-d)+z}{\xi+z}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi$
welches genommen wird mit dem Zeichen von	$\frac{b}{a+g}$	$-\frac{b}{a+g}$

Der Winkel ψ wird $<90^\circ$ genommen wenn b und R gleiches Zeichen haben; $>90^\circ$ wenn verschiedene. Sinn sinm findet man aus c, $a+g$, $f-g=\frac{1}{2}(f-d)-z$ auf gleiche Art.

Da unter $a+g+(b-R)\cos p+(c-R')\sin p$ derjenige der beiden Factoren (45) verstanden werden soll, in welchem die Summe der Quadrate der Coefficienten von $\cos p$ und $\sin p$ kleiner ist als in dem anderen (§. 12) und da $RR'=bc-e(a+g)$ ist, so sind R und b, so wie auch R' und c immer dann mit gleichen Zeichen zu nehmen, wenn bc und $bc-e(a+g)$ gleiches Zeichen besitzen, welches, wegen der Kleinheit von e, gewöhnlich der Fall ist. Tritt jedoch der entgegengesetzte ein, so sind entweder R und b, oder R' und c von entgegengesetzten Zeichen, und über die hierdurch entstehende Willkür ist (wenn eine Entscheidung nöthig sein sollte) so zu verfügen, dass die zu treffende Wahl die kleinere Summe der Quadrate der Coefficienten von $\cos p$ und $\sin p$ zur Folge hat.

Nachdem m mit der gehörigen Genauigkeit gefunden ist, wird m^0 durch die Formeln (57) berechnet. Führt man einen Hülfswinkel μ ein, so dass

$$\operatorname{tang}\mu=\frac{R'}{R}$$

wird, so hat man dadurch

$$\left.\begin{aligned} R^0 \cos m^0 &= \frac{R}{\cos\mu}\cos(\mu-m) = \frac{R'}{\sin\mu}\cos(\mu-m) \\ R^0 \sin m^0 &= \frac{R}{\cos\mu}\sin(\mu-m)\cos n = \frac{R'}{\sin\mu}\sin(\mu-m)\cos n \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (68)$$

und der zugleich mit m^0 hieraus hervorgehende Werth von R^0 muss mit dem in der Formel (67) ausgedrückten übereinstimmen.

19.

Jedesmal wenn die Auflösung der Aufgabe, mit welcher ich mich von dem 6ten § an beschäftigt habe, Anwendung findet, wird auch die Unterscheidung der Punkte der ihr entsprechenden Curve, wo der *Anfang* und wo das *Ende* der Finsterniss gesehen wird, verlangt werden. Es wird daher nöthig die Frage zu beantworten:

ob ein, die Ränderberührung sehender Punkt der Erde den Anfang oder das Ende der Finsterniss wahrnimmt?

Ein Punkt der Erde, welcher zur Zeit t die Berührung der Ränder sieht, sieht offenbar den Anfang oder das Ende der Finsterniss, jenachdem er sich, im nächsten Zeitmomente $t+dt$, innerhalb oder ausserhalb des Schattenkegels befindet. Das erstere, oder das andere findet statt, jenachdem $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2$, welches zur Zeit $t = (s-\zeta)^2 \tang f^2 = (s-\zeta)^2 ii$ (2) ist, während der unendlichkleinen Zeit dt kleiner oder grösser wird als die letztere Grösse. Die Bedingung, dass eine Ränderberührung dem Anfange, oder dem Ende einer Finsterniss zugehöre, ist daher die, dass der in Beziehung auf die Zeit genommene Differentialquotient von

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2-ii(s-\zeta)^2,$$

oder

$$(x-\xi)\frac{dx-d\xi}{dt}+(y-\eta)\frac{dy-d\eta}{dt}-ii(s-\zeta)\frac{ds-d\zeta}{dt}-i\frac{di}{dt}(s-\zeta)^2,$$

oder, den Gleichungen (2) gemäss

$$(s-\zeta)\left[\frac{dx-d\xi}{dt}\sin p+\frac{dy-d\eta}{dt}\cos p-i\frac{ds-d\zeta}{dt}-\frac{di}{dt}(s-\zeta)\right] \ldots\ldots (69)$$

negativ oder *positiv* sei.

Die Werthe der Differentialquotienten von x, y, s, i, $\mu'-a$ und d können aus den von Stunde zu Stunde berechneten Werthen dieser Grössen (§. 4), durch Differentiirung ihrer Interpolationsformeln, gefunden werden;

allein die Ausdrücke der Differentialquotienten von ξ, η, ζ, in Beziehung auf die beiden letzten derselben, müssen aus den Formeln (16) und (17) abgeleitet werden. Die Formeln (16) ergeben:

$$\frac{du}{dt} = v\,\frac{d(\mu'-a)}{dt} = (-\eta\sin d + \zeta\cos d)\frac{d(\mu'-a)}{dt}$$
$$\frac{dv}{dt} = -u\,\frac{d(\mu'-a)}{dt} = -\xi\,\frac{d(\mu'-a)}{dt}$$
$$\frac{dw}{dt} = 0$$

wodurch man aus (17) erhält:

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\xi\cos d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt} + \eta\,\frac{dd}{dt}$$
$$\frac{d\eta}{dt} = \xi\sin d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt} - \zeta\,\frac{dd}{dt}$$
$$\frac{d\xi}{dt} = (-\eta\sin d + \zeta\cos d)\,\frac{d(\mu'-a)}{dt}$$

Schafft man ξ und η durch die Gleichungen (2), nämlich:

$$\xi = x - (s-\zeta)\,i\sin p$$
$$\eta = y - (s-\zeta)\,i\cos p$$

fort, so werden diese Ausdrücke

$$\frac{d\zeta}{dt} = -[x-(s-\zeta)\,i\sin p]\cos d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt} + [y-(s-\zeta)\,i\cos p]\,\frac{dd}{dt}$$
$$\frac{d\eta}{dt} = [x-(s-\zeta)\,i\sin p]\sin d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt} - \zeta\,\frac{dd}{dt}$$
$$\frac{d\xi}{dt} = -[y-(s-\zeta)\,i\cos p]\sin d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt} + \zeta\cos d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt}$$

und ihre Substitution giebt dem Ausdrucke (69) die Form:

$$(s-\zeta)\,(V-W\zeta)\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (70)$$

wo die Bedeutung von V und W die folgende ist:

$$V = \left[\frac{dy}{dt} - x\sin d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt} - s\,ii\,\frac{dd}{dt}\right]\cos p + \left[\frac{dx}{dt} + y\sin d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt} + s\,ii\cos d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt}\right]\sin p$$
$$-\,ix\cos d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt} + iy\,\frac{dd}{dt} - i\,\frac{ds}{dt} - s\,\frac{di}{dt}$$
$$W = -(1+ii)\,\frac{dd}{dt}\cos p + (1+ii)\cos d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt}\sin p - \frac{di}{dt}$$

Die seit dem 18[ten] § ausschliesslich verfolgte, von den Formeln (31), (32) ausgehende Auflösung der *Aufgabe I.* führt indessen nicht unmittelbar zu der Kenntniss von ζ, sondern zur Kenntniss von

$$\zeta' = \frac{s}{\sqrt{(\sigma\sigma-1)}}(P'-\theta'),$$

wodurch

$$\zeta = \frac{s\zeta'}{s+\zeta'} = \frac{\frac{s}{\sqrt{(\sigma\sigma-1)}}(P'-\theta')}{1+\frac{P'-\theta'}{\sqrt{(\sigma\sigma-1)}}}$$

wird und der Ausdruck (69) sich in

$$\frac{s}{\left[1+\frac{P'-\theta'}{\sqrt{(\sigma\sigma-1)}}\right]^2}\left[V-\frac{Ws-V}{\sqrt{(\sigma\sigma-1)}}(P'-\theta')\right]$$

verwandelt. Da es nur auf das *Zeichen* dieses Ausdruckes ankommt, so kann der immer positive Nenner weggelassen und daher ein *negativer* oder *positiver* Werth des Ausdruckes

$$s\left[V-\frac{Ws-V}{\sqrt{(\sigma\sigma-1)}}(P'-\theta')\right] = s\left[V-W'(P'-\theta')\right]$$

als Bedingung des *Anfanges* oder *Endes* der Finsterniss angesehen werden. Da V und W, also auch der in $P'-\theta'$ multiplicirte Factor, $\cos p$ und $\sin p$ nur in der ersten Dimension enthalten, so kann dieser Ausdruck:

$$s\left[\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\cos p+\mathfrak{c}\sin p+(\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}'\cos p+\mathfrak{c}'\sin p)(P'-\theta')\right] \ldots\ldots\ldots (71)$$

geschrieben werden, wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ u. s. w. die Bedeutung:

$$\mathfrak{a} = -ix\cos d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt}+iy\frac{dd}{dt}-i\frac{ds}{dt}-s\frac{di}{dt}$$

$$\mathfrak{b} = \frac{dy}{dt}-x\sin d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt}-s\,ii\,\frac{dd}{dt}$$

$$\mathfrak{c} = \frac{dx}{dt}+y\sin d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt}+s\,ii\cos d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt}$$

$$\mathfrak{a}' = \frac{s}{\sqrt{(\sigma\sigma-1)}}\left[\frac{ix}{s}\cos d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt}-\frac{iy}{s}\frac{dd}{dt}+\frac{i}{s}\frac{ds}{dt}\right]$$

$$\mathfrak{b}' = \frac{s}{\sqrt{(\sigma\sigma-1)}}\left[-\frac{dy}{sdt}+\frac{x}{s}\sin d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt}-\frac{dd}{dt}\right]$$

$$\mathfrak{c}' = \frac{s}{\sqrt{(\sigma\sigma-1)}}\left[-\frac{dx}{sdt}-\frac{y}{s}\sin d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt}+\cos d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt}\right]$$

haben.

Setzt man die Werthe dieser Grössen von Stunde zu Stunde berechnet voraus, so wird die verlangte Entscheidung so leicht als möglich. Gewöhnlich wird das diese Entscheidung ergebende *Zeichen* des Ausdruckes (71) schon aus einem Überblicke hervorgehen, welcher nur eine ohngefähre Kenntniss der Werthe von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ u. s. w. voraussetzt; allein in allen Fällen, in welchen die Finsterniss, an dem die Ränder-

berührung sehenden Punkte der Erde, eine sehr geringe Grösse erreicht, ist grössere Genauigkeit nothwendig; auch wird noch eine zweite, diese fordernde Anwendung derselben Grössen vorkommen. Ich theile ihre berechneten Werthe hier mit:

a	b	c	a′	b′	c′
+ 0,001662	+ 0,306697	+ 0,475842	— 0,000014	— 0,002675	+ 0,243662
+ 0,001132	+ 0,265681	+ 0,490770	— 0,000009	— 0,062339	+ 0,243536
+ 0,000602	+ 0,224600,5	+ 0,505661	— 0,000005	— 0,002002	+ 0,243406
+ 0,000071	+ 0,183459	+ 0,520513	— 0,000001	— 0,001665	+ 0,243272
— 0,000460	+ 0,142260	+ 0,535324	+ 0,000004	— 0,001327	+ 0,243134
— 0,000990	+ 0,101007	+ 0,550091	+ 0,000008	— 0,000989	+ 0,242992
— 0,001521	+ 0,059703	+ 0,564814	+ 0,000012	— 0,000651	+ 0,242846

20.

Durch das Vorhergehende werden die Aufgaben zugänglich, durch deren Auflösung die im 5ten § geforderte Begrenzung der Zeit und des Raumes der Sichtbarkeit einer Finsterniss erlangt werden muss. Zuerst bietet sich dar:

Aufgabe II.

Die Zeiten des Anfangens und des Aufhörens der Erscheinung der Ränderberührung im Horizonte, und auch die Punkte der Erde zu bestimmen, wo dieses Anfangen und Aufhören gesehen wird.

Die hier geforderten Zeiten und Punkte der Erde sind offenbar die den *Berührungen* der Oberflächen des Schattenkegels und der Erde entsprechenden. Die Spitze des Schattenkegels muss also im Horizonte erscheinen, oder, dem 6ten § zufolge, muss $P'=0$ sein; ferner müssen die Zeiten so gewählt werden, dass die Erfüllung dieser Bedingung entweder unmittelbar vorher, oder unmittelbar nachher unmöglich wird. Dem 12ten § gemäss sind dieses die Zeiten, wenn die cubische Gleichung (47) zwei reelle Wurzeln verliert und dagegen zwei imaginäre gewinnt, oder umgekehrt; also die Zeiten, wenn die beiden Wurzeln g' und g'' einander gleich werden. Hieraus geht hervor, dass die Bedingungen des Verschwindens der Ausdrücke (65) und (66) die beiden Gleichungen ergeben, aus deren Auflösung die Auflösung unserer Aufgabe folgt, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= (A-g)^2 - \frac{4C}{g} \\ 0 &= 3g - A + \cos\eta \sqrt{\left[4g(2g-A) + \frac{4C}{g}\right]} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (72)$$

Die erste bestimmt die Zeiten, die zweite η, wodurch u, v, w bestimmt werden.

Wenn man, der ersten Gleichung zufolge, in der zweiten $4C = g(A-g)^2$ setzt, so verwandelt sich diese in:

$$0 = 3g - A \pm \cos\eta\,(3g-A)$$

wo das zweideutige Zeichen so zu verstehen ist, dass $\pm(3g-A)$, so wie die positive Annahme der Quadratwurzel verlangt, positiv wird. Diese Gleichung fordert daher, dass im Falle eines positiven Werthes von $3g-A$, $1+\cos\eta=0$ oder $\cos\eta=-1$, im Falle eines negativen, $-1+\cos\eta=0$ oder $\cos\eta=1$ ist.

In dem Falle in welchem allein g positiv ist, nämlich in dem Falle, in welchem die Spitze des Schattenkegels sich im Inneren der Erde befindet, kann offenbar keine gerade Linie in der Oberfläche des ersteren, noch weniger also diese Oberfläche selbst, die Erde berühren. Da g also hier immer negativ ist und C ebenfalls (§. 13), so ist das letzte Glied der ersten der Gleichungen (72) immer negativ, und sie kann in die beiden reellen Factoren:

$$0 = \left[A-g-2\sqrt{\frac{C}{g}}\right]\left[A-g+2\sqrt{\frac{C}{g}}\right]$$

zerlegt werden. Das Verschwinden des ersten dieser beiden Factoren bestimmt die Zeiten der beiden äusseren Berührungen des Schattenkegels und der Erde, die schon im 5ten § durch τ und τ' bezeichneten; das Verschwinden des zweiten bestimmt dagegen die, den Bedingungen (72) nicht minder entsprechenden, Zeiten der beiden inneren Berührungen beider Oberflächen, die durch $\tau_{,}$ und $\tau'_{,}$ bezeichneten. Dass ihr Verschwinden in dieser Ordnung vor sich geht, wird dadurch klar, dass das $(g''-g')^2$ ausdrückende, also sowohl bis zu τ und nach τ', als auch von $\tau_{,}$ bis $\tau'_{,}$ positive Product beider Factoren, ausserhalb der ersten und innerhalb der zweiten Grenzen die Gleichheit des Zeichens beider fordert; welches Zeichen ausserhalb der ersten Grenzen nur das positive sein kann, weil A, noch mehr also der zweite Factor, hinreichend weit vor und nach der Zeit der Zusammenkunft beider Gestirne, positiv ist und vor τ und nach τ' nicht mehr verschwindet; welches Zeichen ferner innerhalb

der zweiten Grenzen das negative ist, weil dann der Schattenkegel ganz von der Erde umschlossen ist und daher g' und g'', dem 13ten § zufolge, negativ sind, also auch $A-g=g'+g''$, und noch mehr der erste Factor, negativ ist.

Man hat also zur Bestimmung der Zeiten τ und τ' die Gleichung:

$$0 = A-g-2\sqrt{\frac{C}{g}} \dots\dots (73)$$

und zur Bestimmung der Zeiten $\tau_{,}$ und $\tau'_{,}$ die folgende:

$$0 = A-g+2\sqrt{\frac{C}{g}} \dots\dots (73^*)$$

Die den ersteren Zeiten entsprechenden Punkte der Erde, welche ich durch O und O' bezeichnen werde, werden bestimmt, indem man $\cos\eta=1$, oder $\eta=0$ annimmt, also p durch die Formel (63):

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(p-m) = \text{tang}\,(45+\tfrac{1}{2}n)\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}m^0 \dots\dots (74)$$

und u, v, w durch die Formeln (35), aus welchen jedoch P' verschwindet, berechnet; die Bestimmung der den letzteren Zeiten entsprechenden Punkte $O_{,}$ und $O'_{,}$ erfordert die Annahme $\cos\eta=-1$, oder $\eta=180^\circ$, also die Berechnung von p durch die Formel:

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(p-m) = -\,\text{tang}\,(45+\tfrac{1}{2}n)\,\text{cotg}\,\tfrac{1}{2}m^0 \dots\dots (74^*)$$

u. s. w. Denn bis zu τ und von τ' an, hat $P'P'$ nur negative, zwischen $\tau_{,}$ und $\tau'_{,}$ nur positive Werthe, wesshalb der nicht in $\cos\eta$ multiplicirte Theil seines Ausdruckes (72), nämlich $3g-A$, zu den Zeiten τ und τ' negativ, zu den Zeiten $\tau_{,}$ und $\tau'_{,}$ positiv ist, in welchen Fällen das Verschwinden von $P'P'$ also einen resp. positiven und negativen Werth von $\cos\eta$ bedingt.

21.

Ich werde die Auflösungen der beiden Gleichungen (73) erläutern, auch die zur Auflösung der *Aufgabe II.* führenden Vorschriften auf das von der Sonnenfinsterniss am 15. May 1836 hergenommene Beispiel anwenden. — Setzt man in diesen Gleichungen $d+f-a$ für A und $\frac{1}{2}(f+d)+z$ für g, so werden sie:

$$0=-a+\tfrac{1}{2}(f+d)-z \mp 2\sqrt{\frac{C}{\frac{1}{2}(f+d)+z}}$$

oder

$$a-\tfrac{1}{2}(f+d)+2\sqrt{\frac{2C}{f+d}}=-z+2\sqrt{\frac{2C}{f+d}}-2\sqrt{\frac{2C}{f+d+2z}}$$

und $$a-\tfrac{1}{2}(f+d)-2\sqrt{\frac{2C}{f+d}}=-z-2\sqrt{\frac{2C}{f+d}}+2\sqrt{\frac{2C}{f+d+2z}}$$

oder, wenn man die wenig von 1 verschiedene Grösse:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{[1+\frac{2z}{f+d}]}} \cdot \frac{2}{1+\sqrt{[1+\frac{2z}{f+d}]}}$$

einführt,

$$\left.\begin{aligned} a - \tfrac{1}{2}(f+d) + 2\sqrt{\frac{2C}{f+d}} &= -z\left[1 - 2\sqrt{\frac{2C}{f+d}} \cdot \frac{\psi}{f+d}\right] \\ \text{und} \ldots\; a - \tfrac{1}{2}(f+d) - 2\sqrt{\frac{2C}{f+d}} &= -z\left[1 + 2\sqrt{\frac{2C}{f+d}} \cdot \frac{\psi}{f+d}\right] \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \text{(75)}$$

Der links vom Gleichheitszeichen stehende Theil dieser Gleichungen hat die schon bei ähnlichen, früher angewandten Grössen benutzte Eigenschaft, vollständig bekannt zu werden, wenn seine Werthe für fünf Zeiten bekannt sind. Berechnet man daher diese Werthe von Stunde zu Stunde (was geringe Mühe verursacht, da man a, $\frac{1}{2}(f+d)$, C schon kennt) so kann man seine Abhängigkeit von der Zeit, aus den darauf beruhenden Interpolationsformeln erkennen; also, sobald der Werth des rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Theils bekannt ist, die den Gleichungen genügeleistenden Zeiten finden. Dieser Theil ist eine *kleine* Grösse von der Ordnung von z, welche sich sehr langsam ändert. Auf ihre anfängliche Vernachlässigung kann eine näherungsweise richtige Bestimmung jeder der gesuchten Zeiten gegründet werden, für welche dann der Werth des vernachlässigten Theils aufgesucht und einer neuen Auflösung der Gleichungen zum Grunde gelegt werden kann u. s. w. Wegen der Kleinheit und der langsamen Veränderung von z convergiren diese Näherungen sehr schnell zur Wahrheit.

Wendet man, um die Abhängigkeit des links vom Gleichheitszeichen stehenden Theils der Gleichungen von der Zeit t zu erkennen, die für den ersten der im 17ten § getrennten Fälle gegebenen Interpolationsformeln an, und setzt man diese bis zu den 4ten Differenzen fort, was immer hinreichend ist, also die Formeln:

1te Zwischenzeit $a + t.b + \frac{1}{2}(tt - \frac{1}{4})\left\{\Delta_2 + (t-\frac{3}{2})\frac{1}{3}\Delta_3 + (t-\frac{3}{2})(t-\frac{5}{2})\frac{1}{12}\Delta_4\right\}$

2te — $a + t.b + \frac{1}{2}(tt - \frac{1}{4})\left\{c + t.\frac{1}{3}d + (tt - \frac{9}{4})\frac{1}{12}\Delta_4\right\}$

3te & 4te — $a + t.b + \frac{1}{2}(tt - \frac{1}{4})\left\{c + t.\frac{1}{3}d + (tt - \frac{9}{4})\frac{1}{12}e\right\}$

5te — $a + t.b + \frac{1}{2}(tt - \frac{1}{4})\left\{c + t.\frac{1}{3}d + (tt - \frac{9}{4})\frac{1}{12}\Delta_4\right\}$

6te — $a + t.b + \frac{1}{2}(tt - \frac{1}{4})\left\{\Delta_2 + (t+\frac{3}{2})\frac{1}{3}\Delta_3 + (t+\frac{3}{2})(t+\frac{5}{2})\frac{1}{12}\Delta_4\right\}$

welche ich sämmtlich durch

$$a + t.b + \tfrac{1}{2}(tt - \tfrac{1}{4})\,c'$$

bezeichnen werde, und schreibt man ζ für den von z abhängigen Theil der Gleichungen, so sind diese

$$a + t.b + \tfrac{1}{2}(tt - \tfrac{1}{4})\,c' = \zeta$$

und ihre Auflösung ergiebt:

$$t = -\frac{b}{c'} \pm \sqrt{\left[\frac{bb}{c'c'} - \frac{2(a-\zeta)}{c'} + \frac{1}{4}\right]} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

worauf also die Bestimmung von t, durch aufeinanderfolgende Annäherungen, gegründet wird.

Der links vom Gleichheitszeichen stehende Theil der ersten der Gleichungen (75) hat, für die zum Beipiele gewählte Sonnenfinsterniss. folgende Werthe:

+ 0,005902				
	+ 1,262467			
+ 1,268369		— 522480,5		
	+ 0,739985,5		— 293,5	
+ 2,008354,5		— 522774		+ 257
	+ 0,217211,5		— 36,5	
+ 2,225566		— 522810,5		+ 254
	— 0,305599		+ 217,5	
+ 1,919967		— 522593		+ 248,5
	— 0,828192		+ 466	
+ 1,091775		— 522127		
	— 1,350319			
— 0,258544				

Die Werthe des ähnlichen Theils der zweiten Gleichung führe ich hier nicht an, da sie ihr Zeichen, während des Verlaufes der Finsterniss nicht änderen, auch ausser den Grenzen von ζ bleiben, und daher diese Gleichung keine reelle Auflösungen hat, oder innere Berührungen des Schattenkegels und der Erde bei dieser Finsterniss nicht vorkommen.

Die beiden äusseren Berührungen ereignen sich, den eben angeführten Zahlen zufolge, kurz vor der ersten und vor der letzten der 7 Zeiten, wesshalb die für die erste und für die letzte Zwischenzeit vortheilhaftsten Interpolationsformeln hier anzuwenden sind; nämlich die, folgende Werthe von a, b, c' voraussetzenden:

$$a = +0{,}637135{,}5,\quad b = +1{,}262467,\quad c' = -0{,}522480{,}5 + (t - \tfrac{3}{2})\,[-97{,}8 + (t - \tfrac{5}{2})\,21{,}4]$$
$$a = +0{,}416615{,}5,\quad b = -1{,}350319,\quad c' = -0{,}522127 \quad + (t + \tfrac{3}{2})\,[\;155{,}3 + (t + \tfrac{5}{2})\,20{,}7]$$

Setzt man, um die erste Annäherung zu erhalten, $\zeta = 0$, so ergiebt die Formel (76)

$$t = -\,0{,}5039 \quad \text{und} \quad t = +\,0{,}3351$$

Für diese Zeiten findet man die Werthe der zur Bestimmung von z erforderlichen Grössen (§. 18):

$$\mu = -0{,}0007619{,}2 \text{ und } -0{,}0002197{,}7$$
$$\nu = +0{,}780222 \ldots\ldots +0{,}783164$$
$$\xi = -1{,}76934 \ldots\ldots -1{,}77069$$

wodurch man, nach der Formel (64*) erhält:

$$x = -0{,}0009744 \ldots\ldots -0{,}0002804$$

und nach (75):

$$\zeta = +0{,}0018345 \ldots\ldots +0{,}0005282$$

welche Werthe, in (76) vorausgesetzt:

$$t = -0{,}502104 \text{ und } = +0{,}334623$$

ergeben. Sucht man die Werthe von ζ für diese Zeiten, so findet man sie von den angewandten nicht merklich verschieden, so dass hiermit die Auflösung der Gleichung schon geschlossen ist. In Minuten und Secunden ausgedrückt ist daher

$$t = -30' \, 7'',57 \text{ und } = +20' \, 4'',64$$

und die Zeiten des Anfangens und Aufhörens der Sichtbarkeit der Finsterniss sind:

$$\tau = \text{May } 14. \quad 23^h \, 15' \, 38'',43$$
$$\tau' = \quad - \; 15. \quad 5 \quad 5 \quad 50,64$$

Die verschiedenen Momente der zu Kenntniss der Punkte O und O' führenden Rechnung sind folgende. Durch Interpolation der §. 16 und §. 18 gegebenen Werthe findet man:

b	$-0{,}0360459$	$+0{,}5383942$
c	$-0{,}8820731$	$+0{,}7021905$
$\frac{1}{2}(f+d)$	$+0{,}0009782$	$+0{,}0009538$
$a+\frac{1}{2}(f+d) = \xi$	$-1{,}7665921$	$-1{,}7699584$

Hieraus und aus den schon bekannten Werthen von

x	$-0{,}0009744$	$-0{,}0002804$

folgen:

$a+g = \xi+x$	$-1{,}7675665$	$-1{,}7702388$
$d-g = -\frac{1}{2}(f-d)-x$. . .	$-0{,}0000038$	$-0{,}0006734$
$f-g = \frac{1}{2}(f-d)-x$. . .	$+0{,}0019526$	$+0{,}0012342$

und nach den §. 18 gegebenen Formeln:

log R	8,5557304 n	9,7302056
log R'	9,9464658 n	9,8474150
log. sin n cos m	5,7224601	6,7965898 n
log. sin n sin m	7,0435662 n	6,9434204

m	272° 43′ 59″,16	125° 29′ 37″,86
n	0 3 48,31	0 3 42,40
m^0	354 56 16,88	287 8 44,15
log R^0	9,9468247	9,9471392

Die Formel (74) ergiebt, durch die bekannt gewordenen Werthe von m, n, m^0:

p	267° 39′ 55″,84	52° 34′ 49″,48

Legt man ferner der Rechnung zum Grunde (§. 4)

x	− 1,5630861	+ 1,2435868
y	− 0,0634721	+ 0,9478652
l	0,5643698	0,5647130

so wie auch die im 16ten § gegebenen Werthe von σ, δ, ε, ϱ, δ', so erhält man

$x - l \sin p$	− 0,9991847	+ 0,7950877
$y - l \cos p$	− 0,0404835	+ 0,6047188
θ'	+ 0,0045383	+ 0,0058694

und den Formeln (35), aus welchen P' verschwindet, gemäss:

$\log.(1 - \operatorname{tang}\lambda.\theta')\,u$	9,9996205 n	9,9003824
$\log.(1 - \operatorname{tang}\lambda.\theta')\,v$	7,9466880	9,3060029 n
$\log.(1 - \operatorname{tang}\lambda.\theta')\,w$	8,6009229 n	9,7572129

woraus hervorgehen:

$\mu' - a + \omega$	270° 30′ 25″,92	104° 16′ 35″,51
$\log.\operatorname{tang}\varphi,$	8,6012854 n	9,8432066
$\log(1 - \operatorname{tang}\lambda.\theta')$	9,9999834	9,9999792

Der letzte Logarithme gewährt eine Controle der Rechnung, indem sein Werth auch aus den schon bekannten tang λ und θ' hervorgeht. Aus den §. 4 angegebenen Sternenzeiten, welche den mittleren Zeiten entsprechen, denen die dortigen Angaben der Elemente der Finsterniss zugehören, folgen die Ausdrücke von τ und τ'

in Sternenzeit	2ʰ 48′ 27″,630	8ʰ 39′ 37″,368
also μ'	42° 6′ 54″,45	129° 54′ 20″,52
a	52 13 30,77	52 27 30,67
$\mu' - a$	349 53 23,68	77 26 49,85

welches von $\mu' - a + \omega$ subtrahirt ω ergiebt. Um log.tang φ zu erhalten muss man zu log.tang φ, das arithm. Compl. von $\log \sqrt{(1-ee)} = 0{,}0014466{,}7$ addiren. Auf diese Art findet man also die Bestimmung der Punkte O und O', nämlich

ω	280° 37′ 2″,24	26° 49′ 45″,66
φ	—2 17 38,95	+34 57 52,05

Es versteht sich, dass in O die Ränderberührung am Anfange der Finsterniss und bei dem Aufgange des Berührungspunkts, in O' dagegen am Ende und bei dem Untergange, sichtbar ist. Die Punkte am Sonnenrande, wo diese Berührungen stattfinden, gehen aus den schon angegebenen Werthen von p hervor.

22.

In jedem Momente zwischen τ und $\tau_{,}$ und zwischen $\tau'_{,}$ und τ', oder, wenn $\tau_{,}$ und $\tau'_{,}$ nicht wirklich vorhanden sind, zwischen τ und τ', berühren zwei gerade Linien in der Oberfläche des Schattenkegels die Oberfläche des Erde, oder zwei Punkte der Erde sehen die Berührung der Ränder im Horizonte. Die Bestimmung dieser Punkte, oder die Auflösung der

Aufgabe III.

Die Punkte auf der Oberfläche der Erde zu bestimmen, wo die Berührung der Ränder, zu einer gegebenen Zeit, im Horizonte gesehen wird

gewährt, durch ihre Ausführung für hinreichend viele Zeitmomente zwischen den schon durch die Auflösung der vorigen Aufgabe bekannt gewordenen Grenzen, die Erfüllung der im 5ten § an die Theorie der Finsternisse gemachten *zweiten* Forderung.

Die zu erfüllende Bedingung ist, dass die Berührung im Horizonte gesehen werde. Ihr entspricht, dem 6ten § zufolge, die Gleichung

$$P' = 0$$

welche, nach der Formel (60):

$$\cos\eta = \frac{A-3g}{\sqrt{[(3g-A)^2-(g''-g')^2]}}$$

und wenn der Ausdruck (65) von $(g''-g')^2$ substituirt wird,

$$\cos\eta = \frac{(A-3g)}{\sqrt{\left[(3g-A)^2+\frac{4C}{g}-(A-g)^2\right]}} \quad \ldots\ldots\ldots (76)$$

ergiebt. Da die Zeit, welcher A, C, g zugehören, zwischen dieselben Grenzen fällt, zwischen welchen g'' und g' imaginär sind, also $(g''-g')^2$

negativ und der zu $(3g-A)^2$ hinzugesetzte Theil der unter dem Quadratwurzelzeichen stehenden Grösse positiv ist, so wird $\cos\eta$ nicht kleiner als -1 und nicht grösser als 1; oder es sind, innerhalb dieser Grenzen der Zeit, immer zwei der Bedingung entsprechende Werthe von η vorhanden, nämlich der sowohl negativ, als auch positiv genommene Werth, dessen Cosinus den Ausdruck (76) hat. Statt dieser Formel kann auch der Ausdruck von

$$\text{tang}\,\eta = \mp\frac{\sqrt{\left[\frac{4C}{g}-(A-g)^2\right]}}{A-3g} \ldots\ldots\ldots\ldots (77)$$

angewandt werden, welcher fordert, dass die beiden Werthe von η innerhalb oder ausserhalb $\mp 90°$ genommen werden, jenachdem $A-3g$ positiv oder negativ ist; er ist von der Unbequemlichkeit frei, welche die Anwendung von (76) darbietet wenn η sehr klein, oder sehr nahe $= 180°$ ist. Will man, statt A und g, die Grössen in diesen Formeln haben, durch welche ähnliche Formeln schon ausgedrückt sind, so muss man $\frac{1}{2}(f+d)+z$, $f+d-\xi-z$, $-\xi-3z$ für g, $A-g$, $A-3g$ schreiben. Wenn η hierdurch bekannt geworden ist, findet sich p durch die Formel (63).

Indessen ist die Einführung des Winkels η, in die Auflösung dieser Aufgabe, offenbar nicht *wesentlich;* man kann ebensowohl p unmittelbar bestimmen, indem man das Verschwinden des ersten der beiden Factoren (45) in seiner ungeänderten Form verfolgt, also die Gleichung

$$0 = a+g+(b+R)\cos p+(c+R')\sin p$$

auflöset. Hierdurch vermeidet man zwar die Ableitung von p aus η (63); wogegen man aber Hülfsgrössen aufsuchen muss, welche zur Auflösung der letzten Gleichung erforderlich sind, z. B.

$$\text{tang}\,K = \frac{c+R'}{b+R};\; k = \frac{b+R}{\cos K} = \frac{c+R'}{\sin K};\; \cos L = -\frac{a+g}{k}$$

wodurch

$$p = K-L \text{ und } = K+L$$

wird. Auch erleichtert die Kenntniss von η die Auflösung der folgenden Aufgabe, vorausgesetzt dass man sie und die gegenwärtige für gleiche gegebene Zeiten ausführen will. Die Reduction von η auf p ist an sich so leicht, dass selbst ein *kleiner*, durch den ersten Winkel zu erlangender Vortheil, die Mühe welche sie verursacht ersetzt; allein die Auf-

suchung von n, m, m^0, welche Winkel sie als bekannt voraussetzt, erfordert etwas mehr Rechnung, in welcher Beziehung ich bemerke, dass es zur Erleichterung der Anwendung fast aller, in diesem Abschnitte enthaltenen Vorschriften, nicht unwesentlich beitragen wird, wenn die kleine Grösse z und einige der von ihr abhängigen, sich langsam ändernden Grössen, z. B. $\frac{1}{2}(f-d)+z$, $\frac{1}{2}(f-d)-z$,..... Anfangs, für einander so nahe Zeiten berechnet werden, dass man leicht daraus interpoliren kann.

Wenn p auf die eine oder die andere Art bekannt geworden ist, so finden sich u, v, w durch die Formeln (35), aus welchen P' verschwindet. Von der Bestimmung von p an, ist also die auszuführende Rechnung genau dieselbe, welche im vorigen § zur Kenntniss der Punkte O und O' geführt hat. Diese Punkte, so wie auch $O_,$ und $O'_,$ wenn sie wirklich vorhanden sind, liegen offenbar auf der Curve, welche die durch die Auflösung der gegenwärtigen Aufgabe zu bestimmenden Punkte der Erdoberfläche mit einander verbindet. Ich werde diese Curve, um sie kurz bezeichnen zu können, die *O-Curve* nenne. Dass sie aus zwei getrennten Theilen besteht wenn $\tau_,$ und $\tau'_,$ wirklich vorhanden sind, aber ganz zusammenhängend ist wenn der Schattenkegel nicht ganz in die Erde eintritt, habe ich schon bemerkt.

Ob einer der Punkte der *O-Curve* den *Anfang* oder das *Ende* der Finsterniss sieht, wird durch den negativen oder positiven Werth des Ausdruckes (71), welcher sich gegenwärtig in

$$s\,[\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\cos p+\mathfrak{c}\sin p+(\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}'\cos p+\mathfrak{c}'\sin p)\,\theta'] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (78)$$

verwandelt, bedingt. Ob er die Ränderberührung bei dem *Aufgange* oder dem *Untergange* des Berührungspunkts sieht, wird durch die Grösse des Stundenwinkels dieses Punkts $=\mu'-a'+\omega$ (§. 6) bedingt, welche im ersten Falle $>180°$, im zweiten $<180°$ ist. Die Bedingung des Aufganges oder Unterganges ist also der negative oder positive Werth von $\sin(\mu'-a'+\omega)$; welche Bedingung jedoch noch weiter entwickelt werden muss, damit sie von der, in der gegenwärtigen Untersuchung nicht weiter angewandten Geradenaufsteigung a' des Berührungspunkts der Ränder unabhängig werde. Ich habe schon im 6ten § die Formeln:

$$\cos d' \sin(a'-a) = \alpha \cos f$$
$$\cos d' \cos(a'-a) = \beta \cos f$$

angeführt, welche, mit den beiden ersten der Formeln (21), nämlich:

$$m''u = m''\cos\varphi,\sin(\mu'-a+\omega) = m''a - m'\alpha + \alpha P$$
$$m''v = m''\cos\varphi,\cos(\mu'-a+\omega) = m''b - m'\beta + \beta P$$

verbunden,

$$m''\cos d'\cos\varphi,\sin(\mu'-a'+\omega) = m''\cos f(\beta a - \alpha b)$$

ergeben, und daher, da $\cos d'$, $\cos\varphi,$, $\cos f$ immer positiv sind, zeigen, dass $\sin(\mu'-a'+\omega)$ und $\beta a - \alpha b$ gleiches Zeichen besitzen. Die letztere Grösse ist, den Formeln (19) zufolge:

$$= (x - l\sin p)\cos d + (y\sin p - x\cos p)\,i\sin d$$

und es geht daraus hervor, dass die Ränderberührung bei dem Aufgange oder bei dem Untergange des Berührungspunkts gesehen wird, jenachdem

$$x - l\sin p + (y\sin p - x\cos p)\,i\,\mathrm{tang}\,d \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (79)$$

negativ oder positv ist. Offenbar kann das Zeichen dieses Ausdruckes nur wenn er selbst sehr klein ist, von dem Zeichen von $x - l\sin p$ $(=u)$ verschieden sein.

23.

So wie die früher gegebenen, werde ich auch die gegenwärtigen Vorschriften durch ein Beispiel verfolgen. Ich wähle dazu die 3[te] der Zeiten, für welche ich die Elemente der Finsterniss u. s. w. schon mitgetheilt habe, nämlich $1^u 15' 46''$ M. Z. des ersten Meridians. Für diese Zeit findet man im 18[ten] § angegeben:

μ	— 0,00008533
ν	+ 0,1410999
ξ	+ 0,2381640
und man erhält dadurch: z	— 0,0006054

ferner im 16[ten] §:

b	+ 0,161538
c	— 0,339126
$\frac{1}{2}(f-d)$	+ 0,00095365

woraus, verbunden mit z, nach den Formeln §. 18, gefunden werden

log. R	9,2089620
log. R'	9,5296607 n
log. sin n cos m	7,0322427 n
log. sin n sin m	7,3618184 n

m	244° 54′ 40″,91
n	0 8 43,94
m^0	50 37 47,44
$\log R^0$	9,5743211

Die directe Berechnung des Nenners der Formel (76), welcher $=2R^0$ ist, ergiebt $\log R^0$ nur 6 Einheiten der letzten Decimalstelle kleiner, welcher Unterschied der Beschränkung der Angaben von b und c auf 6 Decimalstellen zugeschrieben werden kann. Aus

$3g - A = \xi + 3z$	$+0,2363478$	
$\log . 2R^0$	9,8753511	
folgt η	$\mp 108° \ 21′ \ 21″,58$	(76)

und die Formel (63) ergiebt die diesen beiden Werthen zugehörigen von

p	187° 3′ 43″,47	43° 56′ 57″,61

wodurch, mittelst der Angaben von x, y, l (§. 4) und $\sigma, \delta, \varepsilon, \varrho, \delta'$ (§. 16) gefunden werden

$x - l \sin p$	$-0,5312569$	$-0,9924869$
$y - l \cos p$	$+0,8446920$	$-0,1220491$
θ'	$-0,0019614$	$-0,0038421$
$\log.(1-\tang\lambda.\theta')\,u$	9,7253124 *n*	9,9967331 *n*
$\log\,(1-\tang\lambda.\theta')\,v$	9,4353713 *n*	8,6361979
$\log\,(1-\tang\lambda.\theta')\,w$	9,9042849	9,0590216 *n*
$\mu' - a + \omega$	242° 50′ 43″,13	272° 29′ 47″,01
$\log.\tang\varphi,$	0,1282540	9,0618763 *n*
$\log\,(1-\tang\lambda.\theta')$	0,0000073	0,0000137

Im 4ten § findet man $\mu' = 4^h 48' 54'',933 = 72° 13' 44'',00$ und $a = 52° 18' 18'',82$, also $\mu' - a = 19° \, 55' \, 25'',18$. Man hat also endlich die beiden gesuchten Punkte der *O-Curve:*

ω	222° 55′ 17″,95	252° 34′ 21″,83
φ	$+53$ 25 52,57	-6 35 48,63

von welchen Punkten, dem 19ten § zufolge, der erste den Anfang, der zweite das Ende der Finsterniss sieht; beide sehen die Ränderberührung bei dem Aufgange des Berührungspunkts (§. 22).

24.

Es ist noch die *dritte* der im 5ten § an die Analyse der Finsternisse gemachten Forderungen zu erfüllen, nämlich die krumme Linie auf der Oberfläche der Erde zu bestimmen, auf welcher die Ränderberührung

das Maximum der Finsterniss ist. Die Punkte dieser Curve werden durch die Auflösung der

Aufgabe IV.

Die Punkte auf der Erde zu bestimmen, wo, zu einer gegebenen Zeit, die Ränderberührung als Maximum der Finsterniss gesehen wird
gegeben.

Diese Aufgabe fordert die Erfüllung zweier Bedingungen, nämlich dass die Ränder sich in dem gegebenen Zeitmomente berühren, und dass sie sich in dem folgenden nicht voneinander entfernen. Die erste dieser Bedingungen wird durch die Gleichungen (2) ausgedrückt, und die diesen entsprechenden Punkte der Erde werden, mittelst der Formeln (29), durch eine Grösse ζ' gegeben, welche durch die Gleichung (30):

$$(s+\zeta')^2 = (as+\alpha'\zeta')^2 + (bs+\beta'\zeta')^2 + (cs+\gamma'\zeta')^2$$

bestimmt ist. Die zweite Bedingung fordert, dass der Ausdruck (71) verschwinde, dass also der Gleichung

$$0 = V - W'(P'-\theta')$$

genügegeleistet werde. Die unbekannte Grösse ζ' der ersten Gleichung und $P'-\theta'$ der zweiten sind durch

$$\zeta' = \frac{s}{\sqrt{(\sigma\sigma-1)}}\,(P'-\theta')$$

miteinander verbunden.

Man erhält *eine*, beide Bedingungen zugleich, oder wenn man lieber will, die Bedingung, dass die sich berührenden Ränder sich im nächsten Momente nicht voneinander entfernen, ausdrückende Gleichung, wenn man $P'-\theta'$ zwischen diesen beiden Gleichungen eliminirt; nämlich

$$\left(W'+\frac{V}{\sqrt{(\sigma\sigma-1)}}\right)^2 = \left(aW'+\frac{\alpha'V}{\sqrt{(\sigma\sigma-1)}}\right)^2 + \left(bW'+\frac{\beta'V}{\sqrt{(\sigma\sigma-1)}}\right)^2 + \left(cW'+\frac{\gamma'V}{\sqrt{(\sigma\sigma-1)}}\right)^2 \quad (80)$$

Aus der Auflösung dieser Gleichung müssen die Werthe von p hervorgehen, welche die Punkte der Erde bestimmen, wo die Berührung der Ränder, zu der gegebenen Zeit das Maximum der Finsterniss ist.

Da a, b, c, V, W' die erste Dimension von $\cos p$ und $\sin p$ enthalten, so enthält diese Gleichung die 4[te], oder sie ist vom 8[ten] Grade. Dagegen können nie mehr als vier Parallelkreise der Erde den (bewegten) Schattenkegel zugleich berühren, nämlich zwei auf der den Gestirnen zugewandten, und zwei auf der von ihnen abgewandten Seite der Erde.

Indem hierdurch nur 4 Auflösungen der Aufgabe anschaulich werden, wird die Bemerkung vielleicht nicht überflüssig erscheinen, dass Fälle der Aufgabe mathematisch möglich sind, in welchen sie wirklich 8 reelle Auflösungen haben muss. Der einfachste dieser Fälle ist der, in welchem, statt des Kegels, ein Cylinder angenommen wird, dessen Axe in der Ebene des Aequators liegt, und der, ohne eigene Bewegung, so gelegt wird, dass er mehr als halb von der Erde umschlossen ist. Dann berühren zwei Parallelkreise der Erde die nördlichsten und die südlichsten Punkte der Durchschnittslinie der Oberflächen des Cylinders und der Erde, und für die vier Berührungspunkte ist die Ränderberührung das Maximum der Finsterniss. Ferner berühren zwei Parallelkreise der Erde die beiden Punkte der ausgeschnittenen Curve, welche einander am nächsten kommen, und zwar sehen diese Punkte die Ränderberührung als Minimum der Finsterniss, d. h. nicht in Folge der Annäherung, sondern der Entfernung der Mittelpunkte der beiden Gestirne. Da Beides ebensowohl für eine kugelförmige, als für eine kugelähnliche Figur der Erde gilt, so sind hierdurch, selbst in dem ersten Falle, 6 Auflösungen gerechtfertigt. Aber 8 Auflösungen kann die Aufgabe nur in dem zweiten Falle haben. Diese treten wirklich hervor, wenn der Halbmesser des Cylinders grösser als der Krümmungshalbmesser der Meridiane unter dem Aequator, aber kleiner als die halbe Axe der Erde angenommen, und er so gelegt wird, dass er die Oberfläche der Erde auf jeder Seite des Aequators zweimal durchschneidet, während er unter dem Aequator innerhalb der Erde ist; dann berühren vier Parallelkreise statt der zuletzt gefundenen zwei, die Oberfläche des Cylinders, und zwar sehen die vier Punkte, wo diese Berührungen stattfinden, die Ränderberührung der Gestirne als Minimum der Finsterniss. — Von den 8, in diesem Falle reel hervortretenden Auflösungen der Aufgabe, können in anderen Fällen wohl einige imaginär werden, aber in der die Aufgabe auflösenden Gleichung kann keine davon fehlen. Die Finsternisse zeigen die Ränderberührung nie als ihr *Minimum*, was von der Bewegung des Schattenkegels herrührt, welche grösser ist als die tägliche Bewegung der Punkte der Erde. — Ich bemerke zu dem Vorhergehenden noch, dass die Gleichung (80) wirklich auf den 6ten Grad herabkommt; wenn die Excentricität der Erdmeridiane als verschwindend angenommen wird.

Die Gleichung (80) ergiebt die Bestimmung aller Punkte der Erde, wo ein Parallelkreis, zu der gegebenen Zeit, mit der Oberfläche des bewegten Schattenkegels in Berührung ist. Es hat aber kein Interesse, diejenigen dieser Punkte kennen zu lernen, *unter* deren Horizonten die Ränderberührung der Gestirne dann vor sich geht. Man schliesst sie aus, wenn man die Gleichung so beschränkt, dass sie nur *positive* Werthe von P' statuirt, oder wenn man, statt ihrer, die Gleichung:

$$0 = V - W'(P' - \theta')$$

oder dem Ausdrucke (71) zufolge:

$$0 = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\cos p + \mathfrak{c}\sin p - (\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}'\cos p + \mathfrak{c}'\sin p)(P' - \theta') \quad \ldots\ldots\ldots (81)$$

in welcher P' nur positiv genommen wird, auflöset. Diese irrationale Gleichung ist auch bequemer zu behandeln als die vorige rationale; welche, indem sie vom 8ten Grade ist, eben so wenig direct aufgelöset werden kann. Die darin vorkommenden θ' und P' sind (35):

$$\theta' = (x - l\sin p)\frac{\sin\varepsilon}{\cos\lambda} + \varrho(y - l\cos p)\frac{\cos\varepsilon\sin(\delta - \delta')}{\cos\lambda} - \operatorname{tang}\lambda$$

$$P' = \sqrt{[1 - (x - l\sin p)^2 - \varrho\varrho(y - l\cos p)^2 + \theta'\theta']}$$

25.

Der Schattenkegel des *Mondes*, von welchem entfernteren Gestirne er auch herrühren mag, ist, da wo er die Erde trifft, nie so ausgedehnt, dass diese ganz in sein Inneres eintreten könnte. Bei allen vom Monde veranlassten Finsternissen ist daher wenigstens eine krumme Linie auf der Erdoberfläche vorhanden, einerseits von welcher die Finsterniss nicht sichtbar wird, deren Punkte also die Ränderberührung als Maximum der Finsterniss sehen; tritt der Schattenkegel ganz in die Erde ein, so ist noch eine zweite Linie dieser Art vorhanden und ausserhalb des hierdurch und durch die *O-Curve* begrenzten Raumes der Erdoberfläche wird die Finsterniss nicht wahrgenommen. Diese zweite krumme Linie, deren Punkte durch die Auflösung der *Aufgabe IV.* bestimmt werden sollen, werde ich, um sie kurz bezeichnen zu können, die *M-Curve* nennen, und zwar werde ich unter dieser Benennung die ganze Curve, sie mag einen ununterbrochenen Zug haben, oder aus zwei getrennten Theilen bestehen, begreifen. — In dem Falle der Durchgänge der unteren Planeten durch die Sonne ist dagegen der Schattenkegel, da wo die

Erde ihn trifft, sehr viel weiter ausgedehnt als die Erde, so dass diese nur einen kleinen Theil seiner Oberfläche durchschneidet und daher die *M-Curve*, nur wenn dieses Durchschneiden sich an der Grenze ereignete und nur unvollständig stattfände, wirklich über die Erde gehen könnte. Da dieser Fall vermuthlich nie vorkommen wird, so ist die *M-Curve* im Allgemeinen *nur* in dem Falle der vom Monde verursachten Finsternisse *wirklich* vorhanden, so dass die Auflösung der gegenwärtigen Aufgabe auch nur bei dieser Art der Finsternisse in Betracht kommt.

Indem auf einem Theile der *O-Curve* der Anfang, auf einem anderen das Ende der Finsterniss gesehen wird, muss sie, wenn sie ganz zusammenhängend ist, nothwendig zwei Punkte haben, wo Anfang und Ende zusammenfallen, oder die Ränderberührung das Maximum der Finsterniss ist; wenn sie aus zwei getrennten Theilen besteht, muss jeder derselben zwei solche Punkte haben. Diese Punkte sind offenbar auch Punkte der *M-Curve*, nämlich die ihren Anfang und ihr Ende bestimmenden. In dem einen Paare dieser Punkte, welches ich durch O_2 und O_2' bezeichnen werde, ist die Ränderberührung am frühsten und am spätsten das Maximum der Finsterniss, nämlich zu zwei Zeiten, denen ich die Zeichen τ_2 und τ_2' beilegen werde; in dem anderen Paare (O_3 und O_3') erscheint, wenn der Schattenkegel ganz in die Erde eintritt, die Ränderberührung am entgegengesetzten Theile der Sonne zuerst und zuletzt als Maximum der Finsterniss, zu den Zeiten τ_3 und τ_3'. Offenbar liegen sowohl τ_2 und τ_2', als auch τ_3 und τ_3' innerhalb τ und τ' und ausserhalb $\tau_,$ und $\tau_,'$. In jedem Momente zwischen τ_2 und τ_2' ist *eine* Auflösung der Gleichung (81) vorhanden; in jedem Momente zwischen τ_3 und τ_3' noch *eine zweite.* Mehr Auflösungen können nicht wirklich vorhanden sein, da die vier, für welche die Ränderberührung das Minimum der Finsterniss sein würde, nicht vorkommen und die zwei, welche Punkte der Erde ergeben unter deren Horizonten die Ränderberührung vor sich geht, in der Gleichung (81) nicht enthalten sind.

Um diese Gleichung aufzulösen, werde ich sie in der Form:

$$0 = \log \frac{\mathfrak{a}' + \lambda' \sin(p - L')}{\mathfrak{a} + \lambda \sin(p - L)} (P' - \theta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (82)$$

anwenden, in welcher λ, L, λ', L' folgende Bedeutung haben:

$$\lambda \sin L = -\mathfrak{b} \qquad \lambda' \sin L' = -\mathfrak{b}'$$
$$\lambda \cos L = \mathfrak{c} \qquad \lambda' \cos L' = \mathfrak{c}'$$

Ich werde zuerst einen Näherungswerth von p bekannt voraussetzen und den Werth welchen der Ausdruck (82) durch seine Anwendung erlangt, durch $\varkappa$ bezeichnen. Vernachlässigt man das Quadrat und die höheren Potenzen der nöthigen Verbesserung δp jenes Werthes, so wird sie durch die Gleichung:

$$0 = \varkappa + \left\{ \frac{\lambda' \cos(p-L')}{\mathfrak{a}' + \lambda' \sin(p-L')} - \frac{\lambda \cos(p-L)}{\mathfrak{a} + \lambda \sin(p-L)} + \frac{dP'-d\theta'}{dp\,(P'-\theta')} \right\} \mu\,\delta p$$

bestimmt, in welcher μ den Modul des Briggschen Logarithmensystems bedeutet. Soll δp in Secunden ausgedrückt werden, so muss μ in Arc. 1″ multiplicirt, oder

$$\delta p = \frac{-\varkappa \,.\, 474942{,}''3}{\dfrac{\lambda' \cos(p-L')}{\mathfrak{a}' + \lambda' \sin(p-L')} - \dfrac{\lambda \cos(p-L)}{\mathfrak{a} + \lambda \sin(p-L)} + \dfrac{dP'-d\theta'}{dp\,(P'-\theta')}} \quad \ldots\ldots\ldots (83)$$

genommen werden.

Die Aufsuchung der zur Berechnung von $\varkappa$ und des Nenners der Formel (83) erforderlichen Werthe von P' und $\frac{dP'}{dp}$ kann entweder von p, oder von η abhängig gemacht werden. Das erstere fordert die Anwendung der oft, und auch am Ende des vorigen §'s, angeführten Formeln (35), durch deren Differentiirung man

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\theta'}{dp} &= -\frac{l \sin\varepsilon}{\cos\lambda} \cos p + \frac{l\varrho \cos\varepsilon \sin(\delta-\delta')}{\cos\lambda} \sin p \\ \frac{dP'-d\theta'}{dp\,(P'-\theta')} &= \frac{(x - l\sin p)\, l\cos p - \varrho\varrho(y - l\cos p)\, l\sin p}{P'\,(P'-\theta')} - \frac{d\theta'}{P'dp} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (84)$$

erhält.

Der von η abhängige Ausdruck von P' ist dagegen:

$$P' = N \cos n \sqrt{[3g - A + 2R^0 \cos\eta]}$$

wo zur Abkürzung geschrieben ist

$$N = \frac{\cos n}{1 - \sin n \cos(\eta + m^0)}$$

Sein Differentialquotient ist

$$\frac{dP'}{dp} = -N \frac{d\eta}{dp} \left[N \cos n^2 \frac{R^0}{P'} \sin\eta + \operatorname{tang} n \sin(\eta + m^0) \right]$$

oder da

$$dp = N d\eta$$

ist,

$$\frac{dP'}{dp} = -N \cos n^2 \frac{R^0}{P'} \sin\eta - \operatorname{tang} n \sin(\eta + m^0)$$

Wenn diese Art, P' und seinen Differentialquotienten zu berechnen, an-

gewandt wird, so gebraucht man die Werthe von $x - l\sin p$ und $y - l\cos p$ nicht, wesshalb es auch vortheilhaft ist, sie bei der Berechnung von θ' und $\frac{d\theta'}{dp}$ zu vermeiden. Dieses geschieht wenn man θ' in der Form (42):

$$\theta' = q - \varrho l \frac{\cos\varepsilon \sin(\delta - \delta')}{\cos\lambda} \cos p - \frac{l\sin\varepsilon}{\sin\lambda} \sin p$$

schreibt und sie durch Einführung von λ'' und L'':

$$\lambda'' \sin L'' = -\frac{\varrho l \cos\varepsilon \sin(\delta - \delta')}{\cos\lambda}$$

$$\lambda'' \cos L'' = \frac{l \sin\varepsilon}{\cos\lambda}$$

in

$$\theta' = q - \lambda'' \sin(p - L'')$$

zusammenzieht, wo q die schon in der Formel (42) angewandte Grösse ist, deren Zahlenwerthe sich §. 16 finden. Man hat also, wenn man diese Form der Rechnung wählt und dabei von einem gegebenen Werthe von p ausgeht, aufzusuchen:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\eta + m^0) &= \operatorname{cotg}(45^0 + \tfrac{1}{2}n) \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(p - m) \\ P' &= N\cos n \sqrt{[3g - A + 2R^0 \cos\eta]} \\ \theta' &= q - \lambda'' \sin(p - L'') \\ \frac{dP' - d\theta'}{dp} &= -N\cos n^2 \frac{R^0}{P'} \sin\eta - \operatorname{tang} n\, P'. \sin(\eta + m^0) + \lambda'' \cos(p - L'') \end{aligned}\right\} (85)$$

Die Grösse N kann auch nach der Formel

$$\operatorname{tang}(45^0 + \tfrac{1}{2}n) \frac{\cos\frac{1}{2}(p - m)^2}{\cos\frac{1}{2}(\eta + m^0)^2} = \operatorname{cotg}(45 + \tfrac{1}{2}n) \frac{\sin\frac{1}{2}(p - m)^2}{\sin\frac{1}{2}(\eta + m^0)^2}$$

berechnet werden. Indessen ist sie nur in der Ordnung von n von 1 verschieden, und man bemerkt leicht, dass die Convergenz der Formel (83) zur Wahrheit, durch die Vernachlässigung kleiner Grössen in ihrem Nenner wenig vermindert wird: wenn δp noch einen beträchtlicheren Werth hat, wird der aus der Vernachlässigung von δp^2 u. s. w. hervorgehende Fehler zu derselben Ordnung zu zählen sein, zu welcher der durch jene Vernachlässigungen hervorgebrachte gehört; wenn aber δp schon sehr klein geworden ist, wird ein kleiner Fehler des Nenners der Formel (83) sehr geringen Einfluss auf seinen Werth erhalten. — Wenn man für die Zeit, für welche man das Gegenwärtige anwenden will, schon z, m, n, m^0, $3g - A$, R^0 aufgesucht hat, was in der That der Fall ist wenn man Punkte der *O-Curve* für dieselbe Zeit gesucht

hat, so ist die Anwendung der Formeln (85) vielleicht etwas vortheilhafter als die Anwendung von (84).

Ich muss noch zeigen, wie man den im Vorigen als gegeben vorausgesetzten Näherungswerth von p erlangt. Dem 19ten § zufolge ist $\mathfrak{a}$ immer eine kleine Grösse von der Ordnung von i, und $\mathfrak{a}'$ eine noch weit kleinere von der Ordnung von $\frac{i}{s}$. Auch θ' ist eine kleine Grösse; η ist näherungsweise $= p - m - m^0$. Die Gleichung (82) ist also näherungsweise:

$$0 = \log\frac{\lambda'}{\lambda} + \log\frac{\sin(p-L')}{\sin(p-L)} + \tfrac{1}{2}\log\left[3g - A + 2R^0\cos(p-m-m^0)\right] \quad . . \quad (82^*)$$

und aus dieser ist p durch leicht zu machende Versuche, mit der vorausgesetzten Annäherung zu suchen. Man kann auch die Grenzen von p angeben, zwischen welchen diese Versuche gemacht werden müssen. Da nämlich der irrationale Theil der Gleichung

$$1 = \frac{\lambda'}{\lambda}\frac{\sin(p-L')}{\sin(p-L)}\sqrt{[3g - A + 2R^0\cos(p-m-m^0)]}$$

nicht kleiner als 0 und nicht grösser als 1 werden kann, und für den ersten dieser Werthe $\sin(p-L) = 0$, also $p = L$ oder $= 180^\circ + L$ ist; für den anderen

$$\lambda\sin(p-L) = \lambda'\sin(p-L')$$

also

$$\operatorname{tang}[p - \tfrac{1}{2}(L+L')] = \frac{\lambda+\lambda'}{\lambda-\lambda'}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(L-L')$$

und wenn die rechts vom Gleichheitszeichen stehende Grösse $= \operatorname{tang}\psi$ gesetzt wird, $p = \frac{1}{2}(L+L') + \psi$ oder $180^\circ + \frac{1}{2}(L+L') + \psi$ ist, so liegt p entweder zwischen L und $\frac{1}{2}(L+L') + \psi$, oder zwischen $180^\circ + L$ und $180^\circ + \frac{1}{2}(L+L') + \psi$; und zwar ist es der ersten oder zweiten Grenze desto näher zu suchen, je kleiner oder grösser der irrationale Theil der Gleichung ist. Die Grösse dieses Theils wird gewöhnlich, durch die eben gegebene Begrenzung von p, in so wenig voneinander entfernte Grenzen eingeschlossen werden, dass selbst der Werth von p, mit welchem der *erste* Versuch gemacht wird, der Wahrheit ziemlich nahe, durch Schätzung erlangt werden wird; in welcher Beziehung ich noch bemerke, dass ein gegebener Werth des irrationalen Theils $= r$, durch die zuletzt angeführte Formel zur Kenntniss von p führt, wenn in derselben $\lambda' r$ statt λ' geschrieben wird. Übrigens kann der wahre Werth von p die vorher angegebenen Grenzen offenbar etwas überschreiten, weil sie nicht aus der streng richtigen Gleichung abgeleitet worden sind.

26.

Die Art der Anwendung der eben gegebenen Vorschriften, welche ich beabsichtige, ist die folgende. Zuerst werden für die Zeit, für welche ein Punkt der *M-Curve* bestimmt werden soll, aus der Tafel §. 19:

$$\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{a}',\ \mathfrak{b}',\ \mathfrak{c}',$$

genommen und dadurch λ, L, λ', L' gesucht; ferner aus den Angaben §. 16

$$q,\ k = \frac{\cos\varepsilon \sin(\delta - \delta')}{\cos\lambda},\ h = \frac{\sin\varepsilon}{\cos\lambda}$$

wodurch λ'', L'' bestimmt werden. Die Werthe von m, n, m^0, $3g-A$, R^0 sind schon bekannt wenn man die Punkte der *M-Curve* für Zeitmomente aufsucht, für welche man schon Punkte der *O-Curve* bestimmt hat. Nach diesen Vorbereitungen sucht man, falls eine erste Annäherung an den Werth von p nicht schon aus der vorangegangenen Bestimmung von Punkten der *M-Curve* für wenig verschiedene Zeiten, abgeleitet werden kann, dieselbe durch die Gleichung (82*). Diese Annäherung legt man der ersten Anwendung der Gleichung (82) zum Grunde, wobei fünf Decimalstellen der Logarithmen hinreichend sind; sobald man $\varkappa$ dadurch gefunden hat, berechnet man den Nenner der Formel (83), dessen Ausdruck man aber, durch Vernachlässigung von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ und anderer kleiner Grössen, in

$$\frac{\sin(L'-L)}{\sin(p-L)\sin(p-L')} - \frac{R^0 \sin\eta}{P'(P'-\theta')} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (83^*)$$

zusammenziehen kann, wodurch man δp findet. Die hierdurch verbesserte erste Näherung legt man der zweiten Anwendung der Gleichung (82) zum Grunde, welche man aber mit aller der Genauigkeit durchführt, welche das Resultat erlangen soll. Der daraus hervorgehende neue Werth von δp wird keiner weiteren Verbesserung bedürfen, und man wird nun den gesuchten Punkt der *M-Curve* nach den Formeln (35) bestimmen, in welchen $P'-\theta'$ durch den gleichgültigen Ausdruck

$$\frac{\mathfrak{a} + \lambda \sin(p-L)}{\mathfrak{a}' + \lambda' \sin(p-L')}$$

ersetzt werden kann.

Um ein Beispiel hiervon zu geben, werde ich den Punkt der *M-Curve* bestimmen, welcher die Ränderberührung zu derselben Zeit sieht, für

welche ich im 23ten §, Punkte der *O-Curve* aufgesucht habe. Die dieser Bestimmung zum Grunde zu legenden Elemente sind:

$$\left.\begin{array}{lll} \mathfrak{a} = +\,0{,}000602, & \mathfrak{b} = +\,0{,}224600{,}5, & \mathfrak{c} = +\,0{,}505661 \\ \mathfrak{a}' = -\,0{,}000005, & \mathfrak{b}' = -\,0{,}002002\;, & \mathfrak{c}' = +\,0{,}243406 \end{array}\right\}\ \text{§. 19.}$$

$$q = -\,0{,}0039824,\quad k = +\,0{,}0043816\;,\quad h = -\,0{,}0049168\,.\ \text{§. 16.}$$

und die schon im 23ten § angewandten:

$$\begin{aligned} 3g - A &= +\ 0{,}2363478 \\ \log 2R^0 &= \ 9{,}8753511 \\ m &= 244^\circ\, 54'\, 40{,}''91 \\ n &= \ 0\ \ 8\ 43{,}94 \\ m^0 &= \ 50\ 37\ 47{,}44 \end{aligned}$$

Aus den ersteren erhält man:

$$\begin{aligned} L &= 336^\circ\ 3'\ 1{,}''95\,;\ \log\lambda = 9{,}7429590 \\ L' &= \ 0\ 28\ 16{,}48\,;\ \log\lambda' = 9{,}3863460 \\ L'' &= 221\ 47\ 26{,}27\,;\ \log\lambda'' = 7{,}5708955 \end{aligned}$$

Die aus der Gleichung (82*) abgeleitete rohe Annäherung an den Werth von p ist $= 320^\circ 15'$. Ihr entsprechen

$$\begin{aligned} \eta &= 24^\circ\, 34{,}'0 \\ \log N &= 0{,}00028 \\ P' &= 0{,}95922 \\ \theta' &= -0{,}00767 \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} \log[\mathfrak{a}' + \lambda' \sin(p - L')] &= 9{,}19642\, n \\ C.\log[\mathfrak{a} + \lambda \sin(p - L)] &= 0{,}82374\, n \\ \log(P' - \theta') &= 9{,}98538 \\ \hline \varkappa &= +\,0{,}00554 \end{aligned}$$

Die Formel (83*) ergiebt den Nenner des Ausdrucks von $\delta p = 2{,}1832$, womit sich δp selbst $= -\ 20'\, 5''$ findet. Die *zweite* Annäherung habe ich daher auf $p = 319^\circ\, 54'\, 55''$ gegründet, und davon ausgehend, durch ähnliche, jedoch mit 7 Decimalstellen der Logarithmen geführte Rechnung, erhalten:

$$\begin{aligned} \eta &= 24^\circ\, 14'\, 0{,}''72 \\ \log N &= 0{,}0002868 \\ P' &= 0{,}9601696 \\ \theta' &= -0{,}0076680 \end{aligned}$$

ferner

$$\log[\mathfrak{a}'+\lambda'\sin(p-L')] = 9{,}1994002\,n$$
$$C.\log[\mathfrak{a}+\lambda\sin(p-L)] = 0{,}8141467\,n$$
$$\log(P'-\theta') \ldots = 9{,}9858025$$
$$\varkappa \ldots = +0{,}0000494$$

Der Nenner der Formel (83), vollständig berechnet, ist $=2{,}1329$, wodurch man $\delta p = -11{,}''00$, also den der Gleichung (82) genügeleistenden Werth von $p = 319^\circ 54' 44{,}''00$ erhält. Hiermit ist die Auflösung der Gleichung geschlossen; wollte man diesen Werth von p einer *dritten* Annäherung zum Grunde legen, so würde man keine Verbesserung mehr finden.

Um aus dem jetzt bekannt gewordenen Werthe von p den gesuchten Punkt der *M-Curve* selbst zu finden, hat man

$$\log(P'-\theta') = \log\frac{\mathfrak{a}+\lambda\sin(p-L)}{\mathfrak{a}'+\lambda'\sin(p-L')} = 9{,}9858062;$$

ferner, mittelst der schon im 23ten § angewandten Werthe von x, y, l, σ, δ u. s. w.:

$a = -0{,}2371101$	$\log.\dfrac{\sin\varepsilon}{\cos\lambda} = 7{,}6916848\,n$
$b = +0{,}0479124$	$\log.\dfrac{\cos\varepsilon\cos\delta}{\cos\lambda} = 9{,}9752970$
$c = -0{,}1399814$	$\log.\dfrac{\cos\varepsilon\sin\delta}{\cos\lambda} = 9{,}5158508$

wodurch, den Formeln (35) gemäss, bekannt werden:

$\log.[1+\tang\lambda(P'-\theta')]\,u$. .	9,3835798 n
$\log.[1+\tang\lambda(P'-\theta')]\,v$. .	9,9832847
$\log.[1+\tang\lambda(P'-\theta')]\,w$. .	9,2490887
$\mu'-a+\omega$	$345^\circ\,53'\,25{,}''71$
$\log.\tang\varphi_{,}$	9,2525003
$\log.[1+\tang\lambda(P'-\theta')]$. . .	0,0034060

und da $\mu'-a = 19^\circ 55' 25{,}''18$, $\log.\tang\varphi = \log.\tang\varphi_{,} + 0{,}0014466{,}7$ ist,

ω	$325^\circ\,58'\,0{,}''53$
φ	$+10\;10\;24{,}70$

27.

Zur Vollständigkeit der Auflösung der *Aufgabe IV.* ist noch erforderlich, dass die Grenzen der Zeit bestimmt werden, zwischen welchen resp. *eine* Auflösung, oder *zwei* Auflösungen vorhanden sind. Diese Grenzen sind die im 25ten § durch τ_2 und τ_2' und durch τ_3 und τ_3' bezeichneten

Zeiten, die Zeiten wenn die durch O_2 und O'_2 und durch O_3 und O'_3 bezeichneten, der *O-Curve* und der *M-Curve* gemeinschaftlichen Punkte der Erde die Ränderberührung sehen; welche Punkte, dem Vorhergehenden zufolge, durch jene Zeiten gegeben sind.

Wenn man die Auflösung der *Aufgabe III.* für ein beliebiges Zeitmoment ausgeführt hat, also die ihm entsprechenden beiden Werthe von p kennt, kann man dadurch die Werthe des Audruckes (78) finden. Berechnet man diese wirklich für mehrere Zeitmomente, so werden dadurch Grenzen bekannt, zwischen welchen die gegenwärtig gesuchten Zeiten liegen; nämlich diejenigen unter diesen Momenten, zwischen welchen die Werthe von (78) ihr Zeichen ändern. Sind diese Momente einander hinreichend nahe, so dass man auf die, einer Zeichenänderung vorangehenden und folgenden eine Interpolationsformel für die Werthe von (78) gründen kann, so erlangt man, indem man sie $=0$ setzt, eine Gleichung, welche die Zeit des Verschwindens, also eine der gesuchten Zeiten, bestimmt. Auf diese Art kann man, in Folge der vorangegangenen Berechnung zahlreicher Punkte der *O-Curve*, mit leichter Mühe zur Kenntniss von τ_2 und τ'_2, und (wenn sie vorhanden sind) auch von τ_3 und τ'_3 gelangen.

Indessen habe ich in der gegenwärtigen Abhandlung die Absicht verfolgt, *directe* Methoden für die Analyse der Finsternisse zu suchen, und werde daher auch die Gleichung entwickeln, durch deren Auflösung τ_2, τ'_2, τ_3, τ'_3 *direct* gefunden werden können.

Die zu der Bestimmung dieser Zeiten führenden Bedingungen sind, dass die ihnen entsprechenden Punkte O_2, O'_2, O_3, O'_3, zugleich auf der *O-Curve* und auf der *M-Curve* liegen. Die erste fordert dass (§. 22)

$$0 = P',$$

die andere, dass (§. 24)

$$0 = V - W'(P' - \theta')$$

ist; welche Gleichung sich, da sie mit der vorigen zugleich erfüllt werden soll, auf

$$0 = V + W'\theta'$$

reducirt. Aus diesen beiden Gleichungen, welche beide in Beziehung auf p vom 4^ten^ Grade sind, muss dieser Winkel eliminirt werden, damit eine Gleichung übrig bleibe, welche die Zeit als einzige unbekannte Grösse enthält.

Diese Elimination verliert ihre Schwierigkeit durch dieselbe Umformung der ersten Gleichung, von welcher ich die directe Auflösung der übrigen Aufgaben der Analyse der Finsternisse, in dieser Abhandlung abhängig gemacht habe. Indem diese Gleichung dadurch

$$0 = 2g - g' - g'' + 2\sqrt{(g-g'.g-g'')}\cos\eta$$

geworden ist, also die Ausdrücke:

$$\cos\eta = \frac{g''+g'-2g}{2\sqrt{(g'-g\,.\,g''-g)}}$$

$$\sin\eta = \frac{\pm(g''-g')\sqrt{-1}}{2\sqrt{(g'-g\,.\,g''-g)}}$$

ergiebt; die zweite, oder, wenn sie durch W' dividirt wird,

$$0 = \frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\cos p + \mathfrak{c}\sin p}{\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}'\cos p + \mathfrak{c}'\sin p} + q - \varrho l k \cos p - l h \sin p\,, \quad \ldots\ldots (86)$$

aber durch die Substitution der im 15[ten] § gegebenen Ausdrücke von $\cos p$ und $\sin p$ durch $\cos\eta$ und $\sin\eta$, die Form

$$0 = \frac{\alpha+\beta'\cos\eta + \alpha''\sin\eta}{\beta+\beta'\cos\eta + \beta''\sin\eta} + \frac{\gamma+\gamma'\cos\eta + \gamma''\sin\eta}{\mu-\mu'\cos\eta - \mu''\sin\eta}$$

annimmt, in welcher α, β, γ, μ u. s. w. von η unabhängig sind, so wird die Gleichung, durch welche die gesuchten Zeiten bestimmt werden:

$$0 = \frac{\alpha G + \alpha' G' \pm \alpha'' G''}{\beta G + \beta' G' \pm \beta'' G''} + \frac{\gamma G + \gamma' G' \pm \gamma'' G''}{\mu G - \mu' G' \mp \mu'' G''} \quad \ldots\ldots (87)$$

wo G, G', G'', um abzukürzen, für

$$2\sqrt{(g'-g\,.\,g''-g)}\,,\quad g''+g'-2g\,,\quad (g''-g')\sqrt{-1}$$

oder für

$$2\sqrt{\left[g(2g-A) + \frac{C}{g}\right]}\,,\quad A-3g\,,\quad \sqrt{\left[\frac{4C}{g} - (A-g)^2\right]}$$

geschrieben sind. Diese Grössen sind reel wenn die cubische Gleichung (47) zwei imaginäre Wurzeln hat, was während der Zwischenzeiten zwischen τ und $\tau_{,}$ und zwischen $\tau'_{,}$ und τ', oder, wenn $\tau_{,}$ und $\tau'_{,}$ nicht wirklich vorhanden sind, zwischen τ und τ' stattfindet, welche Zwischenzeiten von den Wurzeln der Gleichung (87) nicht überschritten werden (§. 25). Man kann also den Werth des Ausdruckes, dessen Verschwinden die Bedingung dieser Gleichung ist, sowohl bei der einen, als auch bei der anderen Annahme des zweideutigen Zeichens, für jedes Moment der angegebenen Zwischenzeiten berechnen und auf eine Reihefolge so bekanntgewordener Werthe ihre Auflösung gründen.

Wenn man, bei der Auflösung der Gleichung, von *berechneten* Werthen ihres Ausdruckes ausgeht, so ist die Art diese zu erlangen offenbar gleichgültig: leichter als in der Form (87) wird man sie kennen lernen, wenn man die Reduction von (86) auf diese vermeidet, was geschieht, wenn man zuerst den, einem gegebenen Momente zugehörenden Werth von $\cos\eta$, dann die beiden, ihm entsprechenden Werthe von p aufsucht und diese zur Berechnung des Ausdruckes (86) anwendet. Dieses ist genau dasselbe, was die am Anfange dieses §'s erwähnte Bestimmungsart der gesuchten Zeiten fordert.

28.

Ich habe jetzt streng richtige und directe Methoden, die im 5ten § an die Analyse der Finsternisse gemachten Forderungen zu befriedigen, gegeben und sie für den Fall einer beträchtlichen Entfernung der Spitze des Schattenkegels, auch in einem Beispiele, durchgeführt. Dieser Fall ist, mit Ausnahme innerer Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes, der immer vorhandene. Im Falle solcher Berührungen können aber einige Abweichungen von den für jenen entwickelten Vorschriften nöthig werden, worüber ich jetzt das Erforderliche sagen werde.

Diese Abweichungen entstehen grösstentheils aus einer grossen Verschiedenheit der aufzulösenden cubischen Gleichung in den verschiedenen Arten der Finsternisse. Damit man sie leicht übersehen könne, habe ich die Ausdrücke (40) der Coefficienten a, b, c,...... des Ausdruckes von PP, in den Ausdrücken der Coefficienten der cubischen Gleichung (47) substituirt und diese auf die ursprünglichen Elemente x, y, s, d und die Grösse (26)

$$\sigma\sigma = ss\,\frac{1-ee\cos d^2}{1-ee} + 2sy\,\frac{ee\cos d\sin d}{1-ee} + yy\,\frac{1-ee\sin d^2}{1-ee} + xx$$

zurückgeführt. Ich habe gefunden:

$$\begin{aligned}
-A &= \frac{(1-xx)(1-ee\cos d^2)-yy}{1-ee} - ii\left[1-\sigma\sigma + \frac{1-ee\sin d^2-ss}{1-ee} - \frac{xx\,ee\cos d^2}{1-ee}\right]\\
B &= \frac{ii(\sigma\sigma-1)}{1-ee}\left[1-xx-yy+1-ee\cos d^2-ii(1-ee\sin d^2-ss)\right] \qquad (88)\\
-C &= \frac{i^4(\sigma\sigma-1)^2}{1-ee}
\end{aligned}$$

Da ii immer sehr klein ist, so wird die Grösse dieser Coefficienten

sehr verschieden, jenachdem s, und damit σ, klein oder gross sind. Für kleine Werthe dieser Grössen, so wie sie nur bei den inneren Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes vorkommen, sind B und C sehr klein, so dass die Gleichung dann zwei sehr kleine Wurzeln hat; für grössere Werthe, wie sie sich bei allen übrigen vom Monde verursachten Finsternissen zeigen, ist is, und damit $ii(\sigma\sigma-1)$, zu derselben Grössenordnung zu zählen, zu welcher x und y gehören, wodurch alle drei Coefficienten der Gleichung, und damit ihre 3 Wurzeln, von gleicher Ordnung werden; für noch grössere Werthe endlich, wie sie bei den Durchgängen der unteren Planeten durch die Sonne stattfinden, wird A, vergleichungsweise mit B und C, sehr klein und die Gleichung erhält zwei sehr grosse Wurzeln. Diese Verschiedenheiten der cubischen Gleichung haben zur Folge, dass die Art ihrer Auflösung durch aufeinanderfolgende Näherungen, welche in den beiden letzten Fällen schnell zur Kenntniss ihrer Wurzeln führt, in dem ersten durch eine andere, denselben Vortheil gewährende, ersetzt werden muss. Ich werde jetzt diesen Fall weiter verfolgen.

Wenn i und is kleine Grössen der ersten Ordnung sind, so ist die Wurzel g von der zweiten, indem sie, dem 13ten § gemäss, zwischen Grenzen liegt, welche, zugleich mit d, e, f, von der zweiten Ordnung sind. Das Product C aller drei Wurzeln ist von der vierten Ordnung, $g'g''$ also von der zweiten; die Summe $g'+g''$ hat aber, dem Ausdrucke von A zufolge; i nicht zum Factor. Wenn A nicht so klein ist, dass es als zur ersten Ordnung gehörend betrachtet werden kann, so hat daher die cubische Gleichung eine sich ihm nähernde Wurzel und, ausser g, noch eine Wurzel von der zweiten Ordnung; wenn aber A sehr klein ist, was, wegen der Schnelligkeit der Veränderungen von x und y, nur während kurzer Zeit eintreten kann, so sind g' und g'' entweder beide sehr klein, oder beide imaginär.

Man muss diese beiden Fälle voneinander trennen, wenn man Vorschriften sucht, welche durch aufeinanderfolgende Näherungen schnell zur Kenntniss der Wurzeln der Gleichung führen. Wenn A beträchtlich grösser ist als i, was immer der Fall ist, wenn die Entfernung der Axe des Schattenkegels von dem Mittelpunkte der Erde nicht ihrem Halbmesser näherungsweise gleich ist, so kann die, dann reelle und beträchtlich von g verschiedene Wurzel der Gleichung, welche ich durch

g'' bezeichnen werde, durch aufeinanderfolgende Näherungen leicht bestimmt werden. Giebt man nämlich der Gleichung (47) die Form:

$$g'' = A - \frac{B}{g''} + \frac{C}{g''g''}$$

so ist ihr erstes Glied allein eine Näherung, welche zur Berechnung der folgenden Glieder angewandt, einen mehr genäherten Werth ergiebt u. s. w. — Wenn man dadurch g'' kennen gelernt hat, erhält man die beiden übrigen Wurzeln aus der Formel:

$$\frac{A-g''}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{A-g''}{2}\right)^2 - \frac{C}{g''}\right]}$$

wofür aber, wegen der Kleinheit dieser Wurzeln, besser die folgende

$$\frac{1}{2g''}\left(B - \frac{C}{g''}\right) \pm \frac{1}{2g''}\sqrt{\left[\left(B - \frac{C}{g''}\right)^2 - 4Cg''\right]}$$

angewandt wird. Wenn der Schattenkegel sich ganz ausserhalb der Erde befindet, so ist, dem 13[ten] § zufolge, g die kleinste der dann reellen Wurzeln der Gleichung; wenn er ganz von der Erde umschlossen ist, so ist g die grösste derselben: in dem ersten Falle wird also g gefunden, indem der zweideutige Theil dieses Ausdruckes negativ, in dem zweiten indem er positiv genommen wird.

Wenn dagegen A sehr klein ist, führt folgende Form der Gleichung:

$$g = \frac{C}{B - Ag + gg}$$

durch aufeinanderfolgende Näherungen zur Bestimmung der Wurzel g. Denn das erste Glied ihres Nenners ist von der zweiten Ordnung, das zweite von einer höheren (weil g von der zweiten und A sehr klein ist), das dritte von der vierten; wesshalb Anfangs nur das erste Glied berücksichtigt, oder da, wegen der vorausgesetzten Kleinheit von A, dieses näherungsweise

$$= \frac{ii(\sigma\sigma-1)(1-ee\cos d^2)}{1-ee}$$

ist, als erste Näherung an den Werth von g

$$\frac{-ii(\sigma\sigma-1)}{1-ee\cos d^2}$$

angenommen werden darf. Hierdurch erhält man eine weiter getriebene Näherung u. s. w. — Da hieraus hervorgeht, dass die cubische Gleichung, in dem Falle einer kleinen Entfernung der Spitze des Schattenkegels

von der Erde, leicht aufgelöset werden kann, wenn man ihre Coefficienten A, B, C kennt, so gewährt, in diesem Falle, die tabellarische Kenntniss der Werthe dieser Grössen für die Zeiten, für welche man x, y, s u. s. w. berechnet hat, denselben Vortheil, welcher, im 18ten §, die Einführung von μ, ν, ξ veranlasst hat.

Will man alle inneren Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes nach gleichen Vorschriften behandeln, so muss man die im 7ten § gegebenen anwenden, indem diese die Unterscheidung der Fälle, in welchen die Spitze des Schattenkegels entweder durch die Erde geht, oder nicht, nicht fordern. Wenn dieses geschieht, muss auch der im 19ten § entwickelte, die Entscheidung zwischen dem Anfange und dem Ende der Finsterniss gebende Ausdruck dadurch abgeändert werden, dass er von dem im 7ten § angewandten Ausdrucke von ζ abhängig gemacht wird. Dieser ist

$$\zeta = \frac{P-\theta}{m''} + s$$

und durch seine Substitution verwandelt sich die Formel (70) in:

$$-\frac{P-\theta}{m''}\left(V - Ws - W\frac{P-\theta}{m''}\right)$$

woraus hervorgeht, dass die Ränderberührung dem *Anfange* oder dem *Ende* zugehört, jenachdem

$$\frac{P-\theta}{m''}\left(V - Ws - W\frac{P-\theta}{m''}\right)$$

positiv oder *negativ* ist. Schreibt man dafür

$$\frac{P-\theta}{m''}\left[\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\cos p + \mathfrak{c}\sin p - (\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}'\cos p + \mathfrak{c}'\sin p)\frac{P-\theta}{m''}\right] \quad \ldots \quad (89)$$

so erhalten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ u. s. w. gegenwärtig folgende Bedeutung:

$$\mathfrak{a} = -ix\cos d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt} + iy\,\frac{dd}{dt} - i\,\frac{ds}{dt}$$

$$\mathfrak{b} = \frac{dy}{dt} - x\sin d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt} + s\,\frac{dd}{dt}$$

$$\mathfrak{c} = \frac{dx}{dt} + y\sin d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt} - s\cos d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt}$$

$$\mathfrak{a}' = -\frac{di}{dt}$$

$$\mathfrak{b}' = -(1+ii)\,\frac{dd}{dt}$$

$$\mathfrak{c}' = (1+ii)\cos d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt}$$

Die im 21ten § gegebene Auflösung der Gleichungen (73) erfährt, in dem gegenwärtigen Falle, die Änderung, dass die durch die Interpolationsformel

$$a + t.b + \tfrac{1}{2}(tt - \tfrac{1}{4})\,c'$$

darzustellende Grösse, jetzt $A = d + f - a$, die durch ζ bezeichnete aber

$$\zeta = g \pm 2\sqrt{\frac{C}{g}} = g \pm 2\sqrt{(B - Ag + gg)}$$

wird. Weitere Änderungen der früheren Vorschriften führt der gegenwärtige Fall nicht herbei.

29.

Um das von der Sonnenfinsterniss am 15. May 1836 hergenommene Beispiel auch in Beziehung auf die innere Berührung der Ränder zu vervollständigen, und um die Grösse der dabei in Anwendung kommenden Quantitäten und ihrer Änderungen anschaulich zu machen, werde ich ihre Zahlenwerthe, für dieselben Zeiten berechnet, für welche die früheren ähnlichen Angaben gelten, hier mittheilen.

Die Werthe von log. ϱ und δ' bleiben die im 16[ten] § angegebenen; die der inneren Berührung der Ränder entsprechenden Werthe von log. σ, δ, ε, so wie die Formeln (26) sie unter der Annahme der für diese Berührung geltenden Werthe von s (§. 4.) ergeben, sind:

log σ	δ	ε
0,6236278	18° 3′ 50″,82	−21° 48′ 51″,61
0,6099529	20 37 25,95	−15 23 45,97
0,6021100	23 8 53,41	− 8 38 8,11
0,6007609	25 38 9,83	− 1 43 16,60
0,6060199	28 5 13,31	+ 5 7 59,13
0,6174225	30 30 2,77	+11 43 30,74
0,6340500	32 52 38,50	+17 53 46,22

Die in den Formeln des 7[ten] §'s Anwendung findenden Werthe von α', β', γ' sind aus der Rechnung, welche die eben mitgetheilten Zahlen ergeben hat, hervorgegangen:

α′			β′			γ′		
−1,562075	480636		+3,710289	−34789		+1,210136	173142	
−1,081439	480772	+136	3,675500	−38812	−4023	1,383278	171516	−1626
−0,600667	480876	+104	3,636688	−42840	−4028	1,554794	169872	−1644
−0,119791	480947	+ 71	3,593848	−46871	−4031	1,724666	168211	−1661
+0,361156	480985	+ 38	3,546977	−50897	−4026	1,892877	166534	−1677
+0,842141	480989	+ 4	3,496080	−54920	−4023	2,059411	164847	−1687
+1,323130			3,441160			2,224258		

Die zweiten Differenzen sind hier, so wie in allen ähnlichen Fällen, nahe beständig; die Differenzreihen von log σ, δ, ε sind aber nur dann convergirend, wenn die Spitze des Schattenkegels nicht nahe bei dem Mittelpunkte der Erde vorbeigeht. Erforderlichenfalls müssen daher σ, δ, ε aus α', β', γ' abgeleitet werden.

Die Werthe der Logarithmen von x, y', s', welche in der Berechnung von a, b, c, u. s. w. (40) Anwendung finden, sind, dem 3ten § und den Formeln (41) gemäss:

log. x	log. y'	log. s'
0,1937019 *n*	8,7441377 *n*	0,5914552
0,0340019 *n*	9,0773150	0,5940596
9,7786338 *n*	9,4686542	0,5961789
9,0784236 *n*	9,6708694	0,5978175
9,5576951	9,8081216	0,5989801
9,9253847	9,9121051	0,5996719
0,1216027	9,9958096	0,5998925

Hieraus und aus den übrigen, schon mitgetheilten Zahlen gehen die Werthe von a, b, c u. s. w., den Formeln (40) gemäss, hervor:

a	b	c	d	e	f
— 1,445101	—0,0011537	—0,0280517	—0,0003549	+0,0000018	—0,0003012
— 0,181982	+0,0020114	—0,0195371	—0,0003317	—0,0000027	—0,0003052
+ 0,558220	+0,0051993	—0,0109046	—0,0003176	—0,0000037	—0,0003099
+ 0,775358,5	+0,0083996	—0,0021829	—0,0003127	—0,0000012	—0,0003151
+ 0,469432	+0,0116014	+0,0065988	—0,0003169	+0,0000049	—0,0003209
— 0,359418	+0,0147943	+0,0154114	—0,0003302	+0,0000146	—0,0003272
— 1,710908	+0,0179680	+0,0242257	—0,0003526	+0,0000277	—0,0003341

Die Coefficienten A, B, C der cubischen Gleichung (47) habe ich gefunden:

A	B	C
+ 1,444445	— 0,00015994	— 0,00000012532
+ 0,181345	+ 0,00026974	10963
— 0,558847	+ 0,00049612	10150
— 0,775986	+ 0,00056199	10016
— 0,470070	+ 0,00047743	10547
+ 0,358761	+ 0,00021998	11793
+ 1,710221	— 0,00026539	13869

Endlich sind die Coefficienten der Formel (89):

a	b	c	a′	b′	c′
+ 0,001664	+ 0,307336	— 0,490866	0,000000	— 0,000164	+ 0,247657
+ 0,001136	+ 0,266323	— 0,481606	0,000000	— 0,000164	+ 0,247643
+ 0,000608	+ 0,225245	— 0,471324	0,000000	— 0,000163	+ 0,247629
+ 0,000080	+ 0,184106	— 0,460019	0,000000	— 0,000163	+ 0,247615
— 0,000448	+ 0,142908	— 0,447693	0,000000	— 0,000163	+ 0,247601
— 0,000976	+ 0,101655	— 0,434346	0,000000	— 0,000163	+ 0,247587
— 0,001504	+ 0,060351	— 0,419979	0,000000	— 0,000163	+ 0,247573

30.

Obgleich die im 5ten § an die Analyse der Finsternisse gemachten Forderungen durch das Vorhergehende befriedigt sind, so glaube ich doch noch

Aufgabe V.

Den Weg der centralen Finsterniss auf der Erde und die Zeiten ihres Anfanges und Endes zu bestimmen

auflösen zu müssen. Sie ist viel einfacher als die schon aufgelöseten Aufgaben, weil der Schattenkegel sich in ihr in eine gerade Linie, und seine Durchschnittslinie mit der Erdoberfläche in einen Punkt verwandeln; sie kann als der besondere Fall des Vorhergehenden, in welchem sowohl i als auch l verschwinden, angesehen werden. Die Grundgleichungen (2) werden für diese Aufgabe

$$0 = y - \eta$$
$$0 = x - \xi$$

oder (17):

$$y = w \cos d \sqrt{1 - ee} - v \sin d$$
$$x = u$$

Wenn man r', d', y' einführt, so dass sie durch

$$r' \cos d' = \cos d \sqrt{(1 - ee)}$$
$$r' \sin d' = \sin d$$
$$y' = \frac{y}{r'}$$

bestimmt werden, so verwandeln sich diese Gleichungen in:

$$y' = w \cos d' - v \sin d'$$
$$x = u$$

welche, verbunden mit $1 = uu + vv + ww$,

$$\sin d'^2 = (w - y' \cos d')^2 + (xx + y'y') \sin d'^2$$

oder

$$w = y' \cos d' \pm \sin d' \sqrt{(1-xx-y'y')}$$

ergeben; in welchem Ausdrucke, wenn er von den dadurch bestimmten beiden Punkten der Erde, den angeben soll, *über* dessen Horizonte die centrale Finsterniss vor sich geht, der früheren Bemerkung zufolge, das obere Zeichen zu nehmen ist. Man erhält also:

$$\left.\begin{aligned} u &= x \\ v &= -y' \sin d' + \cos d' \sqrt{(1-xx-y'y')} \\ w &= \quad y' \cos d' + \sin d' \sqrt{(1-xx-y'y')} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (90)$$

wodurch der, die Finsterniss zu einer gegebenen Zeit central sehende Punkt der Erde bestimmt wird.

Die Zeiten, wenn die centrale Finsterniss anfängt und aufhört auf der Erde sichtbar zu sein, sind die der Gleichung:

$$0 = 1 - xx - y'y' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (91)$$

genügeleistenden. Ich werde sie durch $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t}'$ bezeichnen. Die zuerst und zuletzt die centrale Finsterniss sehenden Punkte der Erde gehen aus den Formeln (90) hervor, wenn x, y', d' für die Zeiten $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t}'$ angenommen werden und also das letzte Glied der durch diese Formeln gegebenen Ausdrücke von v und w weggelassen wird.

Um die gegenwärtige Aufgabe durch möglichst leichte Rechnung aufzulösen, muss man x und y' die Ausdrücke:

$$x = m \sin M + n \sin N . t$$
$$y' = m \cos M + n \cos N . t$$

geben, deren von t unabhängige Glieder die zu der Anfangszeit von t gehörigen Werthe von x und y' sind, während $n \sin N$ und $n \cos N$, und damit n und N, sich während des Verlaufes der Finsterniss wenig änderen. Setzt man die Werthe von x und y' von Stunde zu Stunde, und zwar in ungerader Anzahl, wie in dem bisher verfolgten Beispiele, berechnet voraus, so ist die für den Fall II. (§. 17) dienende der *Newton*schen Interpolationsformeln die anzuwendende, und ihr gemäss hat man, wenn diese Werthe durch

$$\ldots\ldots x_{-3},\ x_{-2},\ x_{-1},\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots y'_{-3},\ y'_{-2},\ y'_{-1},\ y'_0,\ y'_1,\ y'_2,\ y'_3,\ \ldots\ldots$$

bezeichnet werden,

$$m \sin M = x_0, \quad m \cos M = y'_0$$

und $n \sin N$:

$$\begin{array}{r|lcl}
\text{für } t = -3 & b+\frac{4}{3}d+\frac{1}{3}f-(\frac{3}{2}c+e+g) & = & \frac{1}{3}(x_0-x_{-3}) \\
-2 & b+\frac{1}{2}d \quad -(c+\frac{1}{4}e) & = & \frac{1}{2}(x_0-x_{-2}) \\
-1 & b\ldots\ldots\ldots-\frac{1}{2}c & = & x_0-x_{-1} \\
0 & b-\frac{1}{6}d \quad \frac{1}{30}f & & \\
1 & b\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{2}c & = & x_1-x_0 \\
2 & b+\frac{1}{2}d\ldots+(c+\frac{1}{4}e) & = & \frac{1}{2}(x_2-x_0) \\
3 & b+\frac{4}{3}d+\frac{1}{3}f+(\frac{3}{2}c+e+g) & = & \frac{1}{3}(x_3-x_0)
\end{array}$$

so wie auch ähnliche Ausdrücke für $n\cos N$. Man erhält hieraus die Werthe von n und N von Stunde zu Stunde.

Bestimmt man nun k und ψ durch:

$$k\cos\psi = m\cos(M-N)+nt$$
$$k\sin\psi = m\sin(M-N)$$

so erhält man

$$x = k\sin(\psi+N)$$
$$y' = k\cos(\psi+N)$$

und daher (90):

$$\left.\begin{array}{l} u = k\sin(\psi+N) \\ v = \sqrt{(1-kk)}\cos d' - k\sin d'\cos(\psi+N) \\ w = \sqrt{(1-kk)}\sin d' + k\cos d'\cos(\psi+N) \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (92)$$

welche Formeln, auf gewöhnliche Art, zur logarithmischen Rechnung eingerichtet werden können. Hierdurch ist der Punkt der Erde bestimmt, welcher zur Zeit t die Finsterniss central sieht.

Es sind noch die Zeiten $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t}'$, wenn die Finsterniss am frühesten und am spätsten central gesehen wird, aufzusuchen. Die Gleichung (91) fordert, dass, zu diesen Zeiten $k=1$ ist; sie wird

$$1 = (m\cos(M-N)+nt)^2 + m^2\sin(M-N)^2$$

und ergiebt, wenn

$$\sin\psi = m\sin(M-N)$$

gesetzt und ψ kleiner als 90° genommen wird:

$$\left.\begin{array}{l} n\mathfrak{t} = -\,m\cos(M-N)-\cos\psi \\ n\mathfrak{t}' = -\,m\cos(M-N)+\cos\psi \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (93)$$

oder auch

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{t} = -\dfrac{\sin(M-N+\psi)}{n\sin(M-N)} \\ \mathfrak{t}' = +\dfrac{\sin(M-N-\psi)}{n\sin(M-N)} \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (93^*)$$

Diese Ausdrücke setzen n und N, wovon das letztere auch im Ausdrucke von $\sin\psi$ vorkommt, für die Zeiten $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t}'$ als bekannt voraus: man

kann Anfangs ihre Werthe für $t = 0$ annehmen; wenn man dadurch die gesuchten Zeiten näherungsweise gefunden hat, die Rechnung mit berichtigten Werthen von n und N wiederholen u. s. w. Diese Rechnungen convergiren, wegen Langsamkeit der Veränderungen von n und N, sehr schnell zur Wahrheit.

31.

Ich unterlasse nicht, auch die Vorschriften des vorigen §'s auf die Sonnenfinsterniss vom 15. May 1836 anzuwenden.

Die Werthe von x sind schon im 4ten § angeführt; die von $\log r'$, d' und y' sind

$\log r'$	d'	y'
9,9987060	18° 59′ 36,″12	− 0,063294
062	19 0 9,98	+ 0,111099,5
063	0 43,80	+ 0,285259,5
065	1 17,58	+ 0,459172
067	1 51,33	+ 0,632824
068	2 25,05	+ 0,806203
070	2 58,74	+ 0,979297

Aus den Werthen von x und y' folgen:

$n \sin N$	$n \cos N$	$\log n$	N
+ 0,4807613	+ 0,1741553	9,7087039	70° 5′ 13,″7
8240	40363	7195	6 7,4
8760	39125	7252	7 1,5
9170	37843	7210	7 55,8
9470	36520	7068	8 50,1
9660	35155	6826	9 44,5
9737	33750	6483	10 38,8

Indem man das mittlere der 7 Zeitmomente, für welche diese Angaben gelten, zur Anfangszeit nimmt, ist

$$x_0 = -\,0,119791 \quad y'_0 = +\,0,459172$$

und diesen Werthen entsprechen:

$$\log m = 9,6762734 \quad M = 345^\circ\, 22'\, 41,''91$$

Die erste, auf $\log. n = 9,70872$, $N = 70^\circ\, 8'$ gegründete, vorläufige Berechnung der Formeln (93) ergiebt:

$$\tau = -\,1,8083, \quad \tau' = +\,1,6386$$

welchen Zeiten

log n =	9,7087214	9,7086925
N =	70° 6′ 17″,75	70° 9′ 24″,83

entsprechen. Die zweite, hierauf gegründete Berechnung ergiebt

$$t = -1{,}808783 \qquad t' = +1{,}639111$$
$$= -1^{St.}\,48'\,31'',62 \qquad = +1^{St.}\,38'\,20'',80$$

oder, die Zeiten des ersten Meridians, wenn die centrale Finsterniss zuerst und zuletzt auf der Erde erscheint, sind:

May 15. $0^{u}\,27'\,14'',38$
und . — $3\ 24\ 6{,}80$

Zur Bestimmung der Punkte der Erde, welche die centrale Finsterniss zuerst und zuletzt sehen, hat man

ψ	208° 11′ 55″,65	331° 47′ 55″,13
$\psi+N$.	278 18 13,40	41 57 19,96
d'	19 0 16,65	19 2 14,70

Man erhält daraus, indem man in den Formeln (92) $k=1$ setzt:

log. u	9,9954230 n	9,8251364
log. v	8,6723713 n	9,3848414 n
log. w	9,1352870	9,8469490
$\mu'-a+\omega$	267° 16′ 44″,05	109° 56′ 32″,53
log. tang $\varphi_{,}$	9,1393740	9,9949572

Im 4ten § findet man, für die Zeiten t und t':

μ' (in Kreistheilen ausgedrückt)	60° 3′ 50″,12	111° 55′ 26″,14
a	52 16 22,45	52 24 38,60
$\mu'-a$.	7 47 27,67	59 30 47,54

und ferner ist log. tang φ = log. tang $\varphi_{,}$ + 0,0014466,7. Man erhält also die geographische Lage der beiden gesuchten Punkte:

ω	259° 29′ 16″,38	50° 25′ 44″,99
φ	+ 7 52 26,51	+ 44 45 46,02

Von der Berechnung anderer Punkte der Curve, auf welcher die Finsterniss central gesehen wird, also von der Anwendung der Formeln (92) auf Fälle in welchen k nicht $=1$ ist, werde ich auch ein Beispiel und zwar das für $3^{u}40'54''$ M. Z. des ersten Meridians geltende, anführen. Für diese Zeit ist $t = +1^{u}25'8''$, $d' = 19°\,2'\,5'',45$, log. n = 9,7086979 $N = 70°\,9'\,12'',89$. Man erhält hieraus:

ψ	328° 25′ 9″,17
$\log.k$	9,9553825
$\log.\sqrt{(1-kk)}$	9,6344486
$\log.u$	9,7502248
$\log.v$	9,2487512
$\log.w$	9,9071249
$\mu'-a+\omega$	72° 30′ 26″,67
$\log.\tang\varphi,$	0,1363373

und endlich den gesuchten Punkt:

ω	16° 17′ 51″,98
φ	53 56 24,25

32.

Zum Schlusse dieses Abschnittes werde ich noch der Näherungen an die Auflösungen, welche ich darin gegeben habe, erwähnen.

Wenn die Erde als eine Kugel angenommen wird, so verwandelt sich der Ausdruck von PP in:

$$(1+ii)(1-xx-yy)-ll+2l(x\sin p+y\cos p)+ii(x\sin p+y\cos p)^2$$

Er ist, in Beziehung auf $x\sin p+y\cos p$ vom zweiten Grade, wesshalb die Auflösung der Gleichung $PP=0$, bei der Voraussetzung der Kugelgestalt der Erde, nicht mehr auf eine cubische Gleichung führt. Er wird selbst in Beziehung auf die trigonometrischen Linien von p vom zweiten Grade, wenn, ausser der Excentricität der Erdmeridiane, auch i, wo es nicht in s multiplicirt ist, vernachlässigt wird, welche Vernachlässigung auf die Voraussetzung zurückkommt, dass die scheinbaren Grössen der beiden Gestirne von ihren Lagen gegen den Horizont unabhängig seien. Will man sich beide Vernachlässigungen erlauben, so wird

$$PP=1-xx-yy-ll+2l(x\sin p+y\cos p) \quad \ldots\ldots \quad (\mathbf{A})$$

und die Auflösung der *Aufgabe I.* vereinfacht sich durch die ihnen entsprechende Vereinfachung der Ausdrücke von

$$\begin{aligned} a &= x-l\sin p & \alpha &= 0 \\ b &= -(y-l\cos p)\sin d & \beta &= \cos d \\ c &= (y-l\cos p)\cos d & \gamma &= \sin d \end{aligned}$$

wodurch $m''=1$, $m'=0$ und die Formeln (21)

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi\sin(\mu'-a+\omega) &= x-l\sin p\\ \cos\varphi\cos(\mu'-a+\omega) &= -(y-l\cos p)\sin d+P\cos d\\ \sin\varphi &= (y-l\cos p)\cos d+P\sin d\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(\mathfrak{B})$$

werden. Auch fallen dann die Gründe weg, welche Anlass gegeben haben, die in den Formeln (24) und (35) enthaltenen Änderungen der Formeln (21) zu suchen.

Der im 19ten § entwickelte Ausdruck, dessen *Zeichen* die Unterscheidung zwischen dem Anfange und dem Ende der Finsterniss giebt, wird nun (70):

$$(s-P)\,(V-WP)$$

oder

$$(s-P)\,[\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\cos p+\mathfrak{c}\sin p-(\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}'\cos p+\mathfrak{c}'\sin p)\,P]\ldots\ldots\ldots(\mathfrak{C})$$

worin aber $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ als verschwindend und

$$\mathfrak{b}=\frac{dy}{dt}-x\sin d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt}$$

$$\mathfrak{c}=\frac{dx}{dt}+y\sin d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt}$$

$$\mathfrak{b}'=-\frac{dd}{dt}$$

$$\mathfrak{c}'=\cos d\,\frac{d(\mu'-a)}{dt}$$

angenommen werden können.

Die *Aufgabe II.* führt, statt auf die Gleichungen (73), jetzt auf

$$0=xx+yy-1\mp 2l-ll$$

oder

$$\left.\begin{aligned}xx+yy&=(1+l)^2\\ \text{und}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad xx+yy&=(1-l)^2\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathfrak{D})$$

woraus die Zeiten τ, τ' und $\tau_{,}$, $\tau'_{,}$, auf die Art gefunden werden, welche ich §. 30 angewandt habe. Die ihnen zugehörigen Werthe von p sind die das Verschwinden von P hervorbringenden, also die, welche

$$x\sin p+y\cos p=\frac{xx+yy+ll-1}{2l}=l\pm 1$$

genügeleisten, oder

$$\sin p=\frac{x}{l\pm 1},\ \cos p=\frac{y}{l\pm 1}$$

Durch ihre Substitution in den Formeln (B), aus welchen P verschwindet, wird die Bestimmung der Punkte O, O', und $O_{,}$, $O'_{,}$ erlangt; nämlich O und O' gehen aus

$$\left.\begin{aligned}(1+l)\cos\varphi\,\sin(\mu'-a+\omega) &= x\\ (1+l)\cos\varphi\,\cos(\mu'-a+\omega) &= -y\sin d\\ (1+l)\sin\varphi &= \quad y\cos d\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathbf{E})$$

hervor, so wie O, und O', aus

$$\left.\begin{aligned}(1-l)\cos\varphi\,\sin(\mu'-a+\omega) &= x\\ (1-l)\cos\varphi\,\cos(\mu'-a+\omega) &= -y\sin d\\ (1-l)\sin\varphi &= \quad y\cos d\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathbf{E}^*)$$

Die der *Aufgabe III.* entsprechenden Werthe von p findet man aus

$$x\sin p + y\cos p = \frac{xx+yy+ll-1}{2l};\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathbf{F})$$

bei ihrer Anwendung zur Bestimmung von Punkten der *O-Curve* verschwindet P aus den Formeln (B).

Indem die Auflösung der *Aufgabe IV.* jetzt auf den Ausdruck (C) gegründet wird, aus welchem $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ verschwinden, fordert sie die Erfüllung der hierdurch vereinfachten Gleichung (81), nämlich

$$0 = \mathfrak{b}\cos p + \mathfrak{c}\sin p - (\mathfrak{b}'\cos p + \mathfrak{c}'\sin p)\,P$$

oder, nach den im 25ten § eingeführten Bezeichnungen und der Substitution des Ausdruckes (A),

$$0 = \log\frac{\lambda'\sin(p-L')}{\lambda\sin(p-L)}\sqrt{\left[1-xx-yy-ll+2l(x\sin p+y\cos p)\right]}\ldots(\mathbf{G})$$

welcher durch Versuche genügegeleistet werden muss.

Die Auflösung der *Aufgabe V.* ist für die wahre Figur der Erde nicht weniger einfach, als für die Voraussetzung ihrer Kugelgestalt; nur gründet sie sich im letzteren Falle auf x, y, d, während sie wirklich von x, y', d' ausgehen sollte. Da die Anwendung der Formeln (§. 30), welche y', d' aus y, d ergeben, unbedeutende Mühe verursacht, so kann die Abkürzung der Rechnung kaum ein Grund werden, statt der richtigen Auflösung dieser Aufgabe eine Näherung anzuwenden. Man wird also die Curve auf der Erde, auf welcher die Finsterniss central gesehen wird, *richtig* bestimmen. Von ihr kann man, unter der Voraussetzung eines *sehr kleinen* Werthes von l, durch leichte Rechnung, zur Kenntniss der sie einschliessenden beiden Theile der *M-Curve* gelangen; welche Rechnung ich hier entwickeln werde, da ringförmige und gänzliche Finsternisse der Sonne nicht selten in dem Falle dieser Voraussetzung sind und man, selbst wenn nur eine beiläufige Kenntniss der die

äussere Berührung der Ränder der Sonne und des Mondes betreffenden Curven gefordert wird, eine genauere Kenntniss des Raumes der Erde, auf welchem die *innere* sichtbar ist, wünschen wird.

Die hier zu verfolgende Voraussetzung ist die, dass $(s-\zeta)\tang f$, oder $l-i\zeta$, eine sehr kleine Grösse ist, deren Quadrat u. s. w. vernachlässigt werden kann. Schreibt man ε dafür, so dass die Gleichungen (2) sich in

$$\eta = y - \varepsilon \cos p$$
$$\xi = x - \varepsilon \sin p$$

verwandeln, und nimmt man ε als bekannt an, so findet man den die Ränderberührung unter dem Positionswinkel p sehenden Punkt der Erde, wenn man in den Formeln (90) resp. $y' - \frac{1}{r'}\varepsilon\cos p$ und $x - \varepsilon\sin p$ statt y' und x schreibt. Indem nur die erste Dimension dieser Änderungen von y' und x in Betracht kommen soll, sind die aus ihnen hervorgehenden Änderungen von u, v, w:

$$\delta u = \varepsilon \sin p$$
$$\delta v = -\varepsilon \sin p \frac{x \cos d'}{\sqrt{(1-xx-y'y')}} - \frac{1}{r'}\varepsilon\cos p\left[\sin d' + \frac{y'\cos d'}{\sqrt{(1-xx-y'y')}}\right]$$
$$\delta w = -\varepsilon \sin p . \frac{x \sin d'}{\sqrt{(1-xx-y'y')}} + \frac{1}{r'}\varepsilon\cos p\left[\cos d' - \frac{y'\sin d'}{\sqrt{(1-xx-y'y')}}\right]$$

Hieraus findet man die Änderungen von ω und $\varphi,$, nämlich

$$\cos\varphi,\delta\omega = \delta u . \cos(\mu'-a+\omega) - \delta v \sin(\mu'-a+\omega)$$
$$\delta\varphi, = -\delta u \sin\varphi,\sin(\mu'-a+\omega) - \delta v \sin\varphi,\cos(\mu'-a+\omega) + \delta w . \cos\varphi,$$

und, wenn man in den Ausdrücken von δv, δu, δw

$$x = \cos\varphi,\sin(\mu'-a+\omega)$$
$$y' = -\cos\varphi,\sin d'\cos(\mu'-a+\omega) + \sin\varphi,\cos d'$$
$$\sqrt{(1-xx-y'y')} = \cos\varphi,\cos d'\cos(\mu'-a+\omega) + \sin\varphi,\sin d'$$

schreibt:

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi,\delta\omega &= \frac{\varepsilon\sin p}{\sqrt{(1-xx-y'y')}}\left[\cos\varphi,\cos d' + \sin\varphi,\sin d'\cos(\mu'-a+\omega)\right]\\ &\qquad + \frac{\varepsilon\cos p}{r'\sqrt{(1-xx-y'y')}}\sin\varphi,\sin(\mu'-a+\omega)\\ \delta\varphi, &= -\frac{\varepsilon\sin p}{\sqrt{(1-xx-y'y')}}\sin d'\sin(\mu'-a+\omega) + \frac{\varepsilon\cos p}{r'(1\sqrt{-xx-y'y')}}\cos(\mu'-a+\omega)\end{aligned}\right\}\ \text{(H)}$$

welche Formeln also Punkte der Curve bestimmen, auf welcher die Ränderberührung, zu der Zeit für welche ω und φ gelten, gesehen wird. Damit diese Punkte der *M-Curve* zugehören, ist erforderlich, dass p der Gleichung (89):

$$0 = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\cos p + \mathfrak{c}\sin p - (\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}'\cos p + \mathfrak{c}'\sin p)\,\frac{P-\theta}{m''}$$

entsprechend angenommen werde, welche, da $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ von der Ordnung von ε sind, aber in

$$0 = \mathfrak{b}\cos p + \mathfrak{c}\sin p - (\mathfrak{b}'\cos p + \mathfrak{c}'\sin p)\,\frac{P-\theta}{m''}$$

und da

$$\frac{P-\theta}{m''} = \zeta - s$$

ist, in

$$0 = [\mathfrak{b} + \mathfrak{b}'(s-\zeta)]\cos p + [\mathfrak{c} + \mathfrak{c}'(s-\zeta)]\sin p$$

zusammengezogen werden kann. Die hieraus hervorgehenden beiden, 180° voneinander verschiedenen Werthe von p, nämlich die

$$\operatorname{tang} p = -\frac{\mathfrak{b} + \mathfrak{b}'(s-\zeta)}{\mathfrak{c} + \mathfrak{c}'(s-\zeta)}$$

entsprechenden, ergeben, in den Formeln (H) angewandt, die beiden gesuchten Punkte der *M-Curve*.

Der Ausdruck von $\delta\omega$ wird etwas einfacher, wenn φ und d, statt $\varphi_{,}$ und d' in ihn eingeführt, also wenn

$$\operatorname{tang}\varphi\sqrt{(1-ee)},\quad \frac{\cos d}{r'}\sqrt{(1-ee)},\quad \frac{\sin d}{r'}$$

für

$$\operatorname{tang}\varphi_{,},\quad \cos d',\quad \sin d'$$

geschrieben werden. Statt des Ausdruckes von $\delta\varphi_{,}$ wird man unmittelbar den von $\delta\varphi$ haben wollen, wesshalb er in

$$\frac{\delta\varphi}{\delta\varphi_{,}} = \frac{\sqrt{(1-ee)}}{1-ee\cos\varphi_{,}^{2}}$$

zu multipliciren ist. Schreibt man noch für ε seinen Ansdruck, so erhält man

$$\delta\omega = \frac{s-\zeta}{\sqrt{(1-xx-y'y')}}\,\frac{i\sqrt{(1-ee)}}{r'}\,[\sin p\,(\cos d + \sin d\operatorname{tang}\varphi\cos(\mu'-a+\omega)) + \cos p\operatorname{tang}\varphi\sin(\mu'-a+\omega)]$$

$$\delta\varphi = \frac{s-\zeta}{\sqrt{(1-xx-y'y')}}\,\frac{i\sqrt{(1-ee)}}{r'(1-ee\cos\varphi_{,}^{2})}\,[-\sin p\,.\sin d\sin(\mu'-a+\omega) + \cos p\,.\cos(\mu'-a+\omega)]$$

Führt man m und M ein, so dass sie durch

$$\sin m\cos M = \cos p$$
$$\sin m\sin M = \sin p\sin d$$
$$\cos m = \sin p\cos d$$

bestimmt werden, so verwandeln sich diese Ausdrücke in:

$$\left.\begin{aligned}\delta\omega &= \frac{s-\zeta}{\sqrt{(1-xx-y'y')}}\,\frac{i\sqrt{(1-ee)}}{r'}\,[\cos m + \sin m \tang\varphi \sin(\mu'-a+\omega+M)]\\ \delta\varphi &= \frac{s-\zeta}{\sqrt{(1-xx-y'y')}}\,\frac{i\sqrt{(1-ee)}}{r'(1-ee\cos\varphi_{,}^{2})}\sin m\cos(\mu'-a+\omega+M)\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(\mathrm{I})$$

Das darin sowohl, als auch in dem Ausdrucke von $\tang p$ vorkommende ζ, kann, ohne Überschreitung der hier beobachteten Näherungsgrenze, so angenommen werden, wie es für den die Finsterniss central sehenden Punkt der Erde ist; also

$$\zeta = w\sin d\sqrt{(1-ee)} + v\cos d\,;$$

wenig davon verschieden ist

$$\sqrt{(1-xx-y'y')} = w\sin d' + v\cos d'$$

dessen Werth schon durch die vorangegangene Bestimmung von ω und φ, also durch die Formeln (92), in welchen er die Bezeichnung $\sqrt{(1-kk)}$ erhalten hat, bekannt geworden ist. Da beide wenig voneinander verschieden sind und der Einfluss ihres Unterschiedes auf $\delta\omega$ und $\delta\varphi$ die kleine Grösse i zum Factor hat, so kann der letztere Werth, ohne wesentlichen Verlust an Genauigkeit, statt ζ angenommen werden.

Dass diese Näherungsmethode nicht angewandt werden darf, wenn $\sqrt{(1-xx-y'y')}$ sehr klein ist, oder wenn die Gestirne dem Horizonte sehr nahe sind, ist offenbar. Um von ihrer Anwendung ein Beispiel zu geben, führe ich hier die dadurch erlangte Bestimmung der beiden Punkte der *M-Curve* an, welche zu der Zeit gehören, für welche ich am Ende von §. 31 gerechnet habe. Aus den Angaben §. 29 geht für diese Zeit hervor:

$$\mathfrak{b} = +\,0{,}125634 \qquad \mathfrak{b}' = -\,0{,}000163$$
$$\mathfrak{c} = -\,0{,}441104 \qquad \mathfrak{c}' = +\,0{,}274595$$

aus §. 4:

$$s = +\,3{,}9707;\quad \log i = 7{,}66279;\quad d = 18^{\circ}\,58'\,33{,}''9$$

aus §. 31:

$$\log r' = 9{,}99871;\quad \log\sqrt{(1-xx-y'y')} = 9{,}63445 = \log\zeta$$

Hiermit findet man

$$\mathfrak{b}+\mathfrak{b}'(s-\zeta) = +\,0{,}12506$$
$$\mathfrak{c}+\mathfrak{c}'(s-\zeta) = +\,0{,}43530$$

aus welchen Werthen

$$p = 163^{\circ}\,58{,}'06 \text{ und } 343^{\circ}\,58{,}'06$$

und ferner

$$M = 174^{\circ}\,39{,}'71 \text{ und } 354^{\circ}\,39{,}'71$$
$$\log\sin m = 9{,}98466,\quad \log\cos m = 9{,}41692$$

hervorgehen. Man erhält hieraus, den Formeln (*I*) gemäss:

$$\delta\omega = \mp 2^\circ\ 4'\ 44''$$
$$\delta\varphi = \mp 0\ 48\ 38$$

und wenn man dieses den §. 31. gefundenen Werthen von ω und φ hinzusetzt, für die beiden Punkte der *M-Curve*

$$\omega \pm \delta\omega = 14^\circ 13'\ 8'' \quad | \quad 18^\circ 22'\ 36''$$
$$\varphi \pm \delta\varphi = 53\ \ 7\ 46 \quad | \quad 54\ 45\ \ 2$$

Die Königsberger Sternwarte, welcher $\omega = 18^\circ\ 9'\ 45''$, $\varphi = 54^\circ\ 42'\ 50'',5$ zugehören, liegt zwischen diesen beiden Punkten, und zwar dem nördlichsten sehr nahe, so dass, dieser Rechnung zufolge, die eine Grenze des Raumes, auf welchem die Finsterniss hätte ringförmig erscheinen sollen, etwas nördlich von ihr ist. Der Beobachtung zufolge war aber die Finsterniss auf der Sternwarte nicht ringförmig, obgleich sie schon in dem südlichen Theile der Stadt so gesehen wurde. Dieser Fehler findet seine Erklärung grösstentheils in Fehlern der Mondtafeln, welche in die Ephemeride und in die der Rechnung zum Grunde gelegten Elemente (§. 4.) übergegangen sind: die Beobachtungen haben wirklich gezeigt, dass die nördlichste der beiden Curven am Himmel, zwischen welchen die Scheibe des Mondes sich bewegte, etwa 4″ südlicher lag, als sie diesen Elementen zufolge hätte liegen sollen. Ein Theil des Fehlers ist aber der in der Rechnung angewandten Näherungsmethode zuzuschreiben, welche in der That, in dem Falle eines so grossen Werthes von l, wie er bei dieser Finsterniss ist ($= 0{,}0183$) $\delta\omega$ und $\delta\varphi$ einige Minuten fehlerhaft geben kann.

Dritter Abschnitt.

Berechnung der Finsternisse für jeden gegebenen Ort der Erde.

33.

In dem vorigen Abschnitte sind die Punkte der Erde bestimmt worden, wo die Ränderberührung beider Gestirne, unter gewissen Bedingungen gesehen wird; in dem gegenwärtigen sollen die Zeiten der Ränderberührungen an einem gegebenen Punkte, so wie auch die Punkte an der Himmelskugel, wo diese sich ereignen, bestimmt werden.

Die gesuchten Zeiten sind die den Gleichungen (2) oder der Gleichung:

$$(l-i\zeta)^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$$

genügeleistenden, in welcher allein die Zeit unbekannt ist. Da diese Gleichung in Beziehung auf die Zeit transcendent ist, so kann sie nur durch Versuche, oder durch aufeinanderfolgende Näherungen aufgelöset werden. Das letztere dieser Mittel werde ich anwenden, vorher aber die Auflösung der quadratischen Gleichung

$$(c+c't)^2 = (a+a't)^2 + (b+b't)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (94)$$

auf welche ich später die unsrige reduciren werde, mittheilen.

Schreibt man die Gleichung:

$$(a'a'+b'b'-c'c')tt + 2(aa'+bb'-cc')t = cc-aa-bb$$

multiplicirt man sie in $a'a'+b'b'-c'c'$ und ergänzt man das Quadrat, so verwandelt sie sich in:

$$[(a'a'+b'b'-c'c')t + aa'+bb'-cc']^2 = (aa'+bb'-cc')^2 - (aa+bb-cc)(a'a'+b'b'-c'c')$$

worin, statt des rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Ausdruckes, auch

$$\left[c\sqrt{(a'a'+b'b')} - \frac{c'(aa'+bb')}{\sqrt{(a'a'+b'b')}}\right]^2 - \frac{a'a'+b'b'-c'c'}{a'a'+b'b'}(ab'-a'b)^2$$

geschrieben werden kann. Wenn man m, M, n, N den Ausdrücken

$$m \sin M = a \qquad n \sin N = a'$$
$$m \cos M = b \qquad n \cos N = b'$$

gemäss und ν durch

$$n \sin \nu = c'$$

bestimmt, so nimmt die Gleichung nach ihrer Division durch nn den Ausdruck:

$$[n \cos\nu^2 . t + m\cos(M-N) - c\sin\nu]^2 = [c - m\sin\nu\cos(M-N)]^2 - [m\cos\nu\sin(M-N)]^2$$

an. Dieser Ausdruck setzt $c' < n$ voraus; den dem entgegengesetzten Falle angemessenen führe ich nicht an, weil er bei der beabsichtigten Anwendung nicht gebraucht wird.

Bestimmt man ψ durch

$$\sin\psi = \frac{m\cos\nu\sin(M-N)}{c - m\sin\nu\cos(M-N)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (95)$$

so erhält man:

$$n\cos\nu^2 t + m\cos(M-N) - c\sin\nu = \mp [c - m\sin\nu\cos(M-N)]\cos\psi$$

Wenn $\psi < 90°$ oder $> 90°$ genommen wird, jenachdem $c - m\sin\nu\cos(M-N)$ positiv oder negativ ist, so bestimmt das obere Zeichen offenbar den kleineren, das untere den grösseren der beiden, der Gleichung genüge-

leistenden Werthe von t. Man hat also, indem man das obere Zeichen immer für den kleineren, das untere für den grösseren dieser Werthe beibehält:

$$t = -\frac{m}{n}\frac{1 \mp \sin\nu \cos\psi}{\cos\nu^2}\cos(M-N) \mp \frac{c}{n}\frac{\cos\psi \mp \sin\nu}{\cos\nu^2} \; \ldots\ldots \quad (96)$$

oder auch, indem man c durch den Ausdruck (95) eliminirt:

$$t = -\frac{m}{n}\left[\cos(M-N) \pm \frac{\cos\psi \mp \sin\nu}{\cos\nu \sin\psi}\sin(M-N)\right] \; \ldots\ldots \quad (97)$$

Führt man ψ' ein, so dass

$$\cos\psi' = \frac{\cos\psi \mp \sin\nu}{1 \mp \sin\nu\cos\psi}$$

$$\sin\psi' = \frac{\cos\nu \sin\psi}{1 \mp \sin\nu\cos\psi}$$

und, übereinstimmend mit beiden Ausdrücken,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi \operatorname{tang}(45^\circ \pm \tfrac{1}{2}\nu) \; \ldots\ldots \quad (98)$$

ist, so wird

$$1 \mp \sin\nu\cos\psi = \cos\nu \frac{\sin\psi}{\sin\psi'}$$

und die Formeln (96) und (97) verwandeln sich in:

$$t = -\frac{1}{n\cos\nu}\cdot\frac{\sin\psi}{\sin\psi'}\cdot[m\cos(M-N) \pm c\cos\psi'] \; \ldots\ldots \quad (96^*)$$

$$t = -\frac{m}{n}\frac{\sin[\psi' \pm (M-N)]}{\sin\psi'} \; \ldots\ldots \quad (97^*)$$

Die beiden Formeln (97) sind jedoch nicht vortheilhaft wenn ψ' entweder sehr klein, oder sehr nahe $= 180^\circ$ ist.

Wenn man für t den Ausdruck (97) setzt und ψ' einführt, findet man

$$a + a't = \mp\frac{m\sin(M-N)}{\sin\psi'}\sin(N \mp \psi')$$

$$b + b't = \mp\frac{m\sin(M-N)}{\sin\psi'}\cos(N \mp \psi')$$

$$c + c't = \frac{m\sin(M-N)}{\sin\psi'}$$

woraus hervorgeht, dass für den kleineren der der Gleichung (94) genügeleistenden Werthe von t:

$$\left.\begin{aligned} a + a't &= -(c + c't)\sin(N - \psi') = (c + c't)\sin(N + 180^\circ - \psi') \\ b + b't &= -(c + c't)\cos(N - \psi') = (c + c't)\cos(N + 180^\circ - \psi') \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (99)$$

und für den grösseren

$$\left.\begin{aligned} a+a't &= (c+c't)\sin(N+\psi') \\ b+b't &= (c+c't)\cos(N+\psi') \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(99*)}$$

ist.

34.

Wenn die Zeit des ersten Meridians, welche einer Ränderberührung der Gestirne an einem durch ω und φ gegebenen Orte zugehört, aus zwei Theilen τ und t zusammengesetzt, und τ als gegeben angesehen wird, so sind die zu τ gehörigen Werthe von $x-\xi$, $y-\eta$, $l-i\zeta$ gleichfalls als gegeben anzusehen, und die zu $\tau+t$ gehörigen sind die Summen dieser Werthe und ihrer Änderungen bis zur Zeit $\tau+t$. Wenn τ sich der Zeit der Ränderberührung so weit nähert, dass die Änderungen zwischen beiden Zeiten immer in einem gleichen Sinne fortschreiten, so ist die Gleichung (94), welche, a, b, c in demselben Sinne verändernde Werthe man auch a', b', c' geben mag, eine Näherung an die $\tau+t$ bestimmende; nämlich ihre Auflösung ergiebt, statt dieser unbekannten Grösse, eine sich ihr *mehr* als τ nähernde. Man kann also, indem man von dem vorausgesetzten Werthe von τ ausgeht, eine Reihe von Zeiten $\tau_{,}$, τ_2, ... finden, welche sich der gesuchten Zeit der Ränderberührung fortschreitend, und offenbar desto schneller nähert, je näher der Zeit proportional die Änderungen nach und nach werden.

Wenn der vorausgesetzte Werth von τ ohngefähr die Zeit der Mitte der Finsterniss ist, so sind die Zeiten der Ränderberührungen nie so weit von ihm entfernt, dass die Annahme der Zeit proportionaler Änderungen von $x-\xi$, $y-\eta$, $l-i\zeta$ zwischen τ und $\tau+t$, nicht näherungsweise wahr wäre. Diese Voraussetzung des Werthes von τ ist selbst hinreichend, eine *sehr schnelle* Convergenz zu ergeben.

Die Anwendung des Vorigen zur Bestimmung des Anfanges und Endes einer Finsterniss setzt die Kenntniss vorher berechneter Werthe von x, y, l, i, μ', a, d voraus, und zwar, der Bemerkung im 17ten § zufolge, für *vier* in arithmetischer Progression fortgehende Zeiten, in deren Umfange die gesuchten Zeiten liegen. Dadurch sind sowohl diese Grössen selbst, also auch ihre Änderungen gegeben. Als Beispiel führe ich die vier letzten der §. 4 gegebenen, sich auf die äussere Berührung der Ränder der Sonne und des Mondes am 15. May 1836 beziehenden Werthe hier wieder an, μ' in Theilen des Kreises ausgedrückt:

Zeit d. ersten Meridians.	x	y	l	$\log i$	μ'	a	d
$2^u\ 15'\ 46''$	−0,119791	+0,457806	0,564631	7,66491	$87°\ 46'\ 11'',83$	$52°\ 20'\ 42'',71$	$18°\ 57'\ 46'',14$
3 15 46	+0,361156	+0,630942	678	90	102 48 39,68	23 6,62	58 19,81
4 15 46	+0,842141	+0,803806	705	90	117 51 7,52	25 30,54	58 53,45
5 15 46	+1,323130	+0,976386	713	90	132 53 35,37	27 54,47	59 27,06

Die hierauf gegründeten Ausdrücke derselben Grössen für die unbestimmte Zeit $3^u\ 45'\ 46'' + 3600''\, t$ sind

$$\left.\begin{array}{rl} x = & +\,0{,}6016459 + t\ 0{,}4809864 + tt\ 0{,}0000105 - t^3\ 0{,}0000057 \\ y = & +\,0{,}7174088 + t\ 0{,}1728645 - tt\ 0{,}0001390 - t^3\ 0{,}0000020 \\ l = & \,0{,}5646939 + t\ 0{,}0000270 - tt\ 0{,}0000098 \\ \log i = & \,7{,}66490 \\ \mu' = & 109°\ 49'\ 53'',60 + t\ 15°\ 0'\ 27'',84 \\ a = & 52\ 24\ 18{,}58 + t\,.\ 0\ 2\ 23{,}92 \\ d = & 18\ 58\ 36{,}63 + t\,.\ 0\ 0\ 33{,}64 \end{array}\right\} \ldots (100)$$

Man kann zwei Anwendungsarten der Auflösung der Gleichung (94) verfolgen. Die *erste* beruhet auf der Annahme der jeder der nach und nach bekannt werdenden Zeiten τ zugehörigen Werthe der *Differentialquotienten* von $x - \xi$, $y - \eta$, $l - i\zeta$, statt a', b', c', ergiebt also jede folgende der Näherungen an die Zeit einer Ränderberührung, indem ihr die der vorhergehenden zugehörigen Werthe von $a, b, c;\ a', b', c'$ zum Grunde gelegt werden. Die *zweite* geht, bei allen Näherungen, von Einem Werthe von τ und also den ihm zugehörigen Werthen von a, b, c aus, fordert aber, dass bei jeder folgenden die *Differenzenquotienten* der der vorhergehenden zugehörigen Werthe von a, b, c, von den τ zugehörigen angerechnet, als a', b', c' angenommen werden.

Das *erste* Verfahren fordert, dass folgende Grössen für jede der Zeiten τ, von welchen man ausgeht um die nächste kennen zu lernen, berechnet werden:

a) die Werthe von x, y, l, welche man durch die Interpolationsformeln oder ihre Entwickelungen (100) erhält;

b) die Werthe von ξ, η, $i\zeta$, deren Ausdrücken (7) eine zur logarithmischen Rechnung geeignete Form gegeben werden kann;

c) die Werthe von $\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dl}{d\tau}$, welche aus der Differentiirung der Entwickelungen (100) hervorgehen, endlich

d) die Werthe von $\frac{d\xi}{d\tau}, \frac{d\eta}{d\tau}, \frac{di\zeta}{d\tau}$, wofür man die Formeln (§. 19):

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \varrho \cos\varphi' \cos(\mu'-a+\omega) \frac{d(\mu'-a)}{d\tau}$$
$$\frac{d\eta}{d\tau} = \xi \sin d \frac{d(\mu'-a)}{dt} - \zeta \frac{dd}{d\tau}$$
$$\frac{d.i\zeta}{d\tau} = -i\xi \cos d \frac{d(\mu'-a)}{d\tau} + i\eta \frac{dd}{d\tau} + \zeta \frac{di}{d\tau}$$

anzuwenden hat.

Anfangs, wenn τ noch der Mitte der Finsterniss ohngefähr entsprechend angenommen wird, würde die Berücksichtigung des von der Veränderung von d abhängigen Theils des Differentialquotienten von η, so wie auch der Grösse $i\zeta$ und des Differentialquotienten von $l-i\zeta$, eine unnöthige Vermehrung der Rechnung sein, indem diese *kleinen* Grössen, vergleichungsweise mit den Fehlern der Annahme der Zeit proportionaler Veränderungen von $x-\xi$ und $y-\eta$, unbedeutend sind. Die erste Annäherung an die Zeiten der Ränderberührungen kann also durch wenig genau geführte Rechnung nach folgenden abgekürzten Formeln, gefunden werden:

$$\left.\begin{aligned} m\sin M &= x-\xi \qquad n\sin N = x' - \varrho\cos\varphi' \cos(\mu'-a+\omega)\frac{d(\mu'-a)}{d\tau} \\ m\cos M &= y-\eta \qquad n\cos N = y' - \varrho\cos\varphi' \sin(\mu'-a+\omega)\frac{d(\mu'-a)}{d\tau}\sin d \\ \sin\psi &= \frac{m}{l}\sin(M-N) \\ t &= -\frac{m}{n}\cos(M-N) \mp \frac{l}{n}\cos\psi \end{aligned}\right\} \quad \ldots (101)$$

worin x, y, μ', d der Zeit τ entsprechend anzunehmen sind und x' und y' die Coefficienten von t in den Ausdrücken (100) von x und y bedeuten. Diese leichte Rechnung wird die Zeiten der Ränderberührungen zwar nur bis auf einige Zeitminuten sicher angeben, allein wenn man sie nur kennen lernen will um dadurch die Beobachtung der Finsterniss zu erleichtern, so wird vielleicht selbst ein Fehler von solcher Grösse nicht als ein bedeutender anzusehen, und dann auch keine Veranlassung vorhanden sein, eine grössere Annäherung zu suchen. Der den Ort am Sonnenrande, wo die Ränderberührung zu erwarten ist, bestimmende Werth von p ist, nach den Formeln (99), für den Anfang $= N+180°-\psi$, für das Ende $= N+\psi$.

Soll die Bestimmung der Momente der Finsterniss bis zur vollen Übereinstimmung mit den Elementen der Rechnung getrieben werden, so erlangt man, im Allgemeinen, zwar die schnellste Convergenz der dahin

führenden aufeinanderfolgenden Näherungen, indem man a', b', c' für jede Anfangszeit einer neuen Näherung *vollständig* bestimmt; allein wenn man die kleinen Veränderungen von d und $l-i\zeta$ vernachlässigt, äussert der dadurch begangene Fehler der Annahme der relativen Bewegung des gegebenen Punktes der Erde und der Gestirne, seinen Einfluss nur während der Zwischenzeit zwischen τ und dem wahren Momente der Ränderberührung, also während desto kürzerer Zeit und daher desto kleiner, je stärker die Annäherung von τ an dieses Moment schon ist. Die Convergenz der Annäherungen wird daher durch diese Vernachlässigungen nicht wesentlich vermindert. Kürzt man die Rechnung dadurch ab, so besteht sie in der wiederholten Anwendung der Formeln (101); mit dem einzigen Unterschiede, dass in der zweiten und den folgenden Anwendungen, statt des in der ersten zureichenden l, $l-i\zeta$ angewandt wird.

35.

Zum Beispiele des Vorigen wähle ich die Bestimmung des Anfanges und Endes der Sonnenfinsterniss am 15. May 1836 für die Königsberger Sternwarte, welcher $\omega = 18^\circ\, 9'\, 45''$, $\varphi = 54^\circ\, 42'\, 50'',5$, und wenn $\log\sqrt{(1-ee)} = 9{,}9985533{,}3$ angenommen wird, $\log\varrho = 9{,}9990393$, $\varphi' = 54^\circ\, 32'\, 1'',83$ zugehören.

Um die *erste* Annäherung zu erhalten, gehe ich von $\tau = 0$ aus, welche Zeit $= 3^u\, 45'\, 46''$ M. Z. des ersten Meridians, dieselbe ist, für welche die von t unabhängigen Theile der Ausdrücke (100) gelten. Für diese Zeit hat man

$$x = 0{,}6016,\quad \xi = 0{,}5607;\quad m\sin M = +\,0{,}0409$$
$$y = 0{,}7174;\quad \eta = 0{,}7216;\quad m\cos M = -\,0{,}0042$$
$$M = 95^\circ\, 51',8,\quad \log m = 8{,}61400$$
$$x' = +\,0{,}4810;\ \frac{d\xi}{d\tau} = +\,0{,}0377;\quad n\sin N = +\,0{,}4433$$
$$y' = +\,0{,}1729;\ \frac{d\eta}{d\tau} = +\,0{,}0477;\quad n\cos N = +\,0{,}1252$$
$$N = 74^\circ\, 13',8,\quad \log n = 9{,}66337$$

und, da $l = 0{,}5647$ ist,

$$\psi = 1^\circ\, 32',3$$
$$t = -0{,}0830 \mp 1{,}2254$$

oder

$$t = -\,1{,}3084 \quad \text{und} \quad t = +\,1{,}142_4$$

Die *zweite* Annäherung geht für den Anfang und für das Ende der Finsterniss von verschiedenen Werthen von τ aus, nämlich von den eben

gefundenen Werthen von *t*. Die beiden neuen Werthe, welche daraus hervorgehen, werden die Anfangszeiten der *dritten* Annäherung u. s. w. — Ich werde die einzelnen Momente dieser beiden Annäherungen hier anführen, so wie man sie findet, indem man die vollständigen Ausdrücke von a', b', c' anwendet.

Annäherung	II.		III.	
	Anfang.	Ende	Anfang.	Ende.
τ	— 1,3084	+ 1,1424	— 1,37099	+ 1,09176
x	— 0,027646	+ 1,151130	— 0,057747	+ 1,126773
y	+ 0,490999	+ 0,914705	+ 0,480157	+ 0,905967
l	0,564642	0,564712	0,564639	0,564712
$x'=\frac{dx}{d\tau}$	+ 0,480930	+ 0,480988	+ 0,480900	+ 0,480989
$y'=\frac{dy}{d\tau}$	+ 0,173218	+ 0,172539	+ 0,173234	+ 0,172554
$l'=\frac{dl}{d\tau}$	+ 0,000053	+ 0,000005	+ 0,000054	+ 0,000006
$\mu'-a+\omega$	55 57 41,31	92 43 34,10	55 1 21,18	91 57 59,34
d	18 57 52,61	18 59 15,06	18 57 50,51	18 59 13,36
ξ	+ 0,479745	+ 0,578285	+ 0,474371	+ 0,578599
η	+ 0,663233	+ 0,777401	+ 0,660697	+ 0,774907
$i\zeta$	+ 0,002638	+ 0,001102	+ 0,002672	+ 0,001135
$\frac{d\xi}{d\tau}$	+ 0,084845	— 0,007209	+ 0,086892	— 0,005201
$\frac{d\eta}{d\tau}$	+ 0,040727	+ 0,049223	+ 0,040267	+ 0,049247
$\frac{d.i\zeta}{d\tau}$	— 0,000549	— 0,000661	— 0,000543	— 0,000662
M	251 15 0,75	76 31 16,23	251 15 31,20	76 33 13,92
$\log. m$	9,7290244	9,7701671	9,7496684	9,7509891
N	71 30 17,41	75 49 26,00	71 21 6,68	75 46 7,57
$\log n$	9,6208196	9,7020250	9,6189258	9,7003426
ν	+ 4′ 57″,31	+ 4′ 32″,81	+ 4′ 56″,11	+ 4′ 34″,70
ψ	14 32,76	43 47,26	5 34,97	47 10,35
ψ'	14 34,02	43 43,79	5 35,448	47 6,587
t	— 0,06259	— 0,05064	— 0,000129	— 0,000094
$\tau+t$	— 1,37099	+ 1,09176	— 1,371119	+ 1,091666
$p=N+180^\circ-\psi'$ und $=N+\psi'$	251 15 43,4	76 33 9,8	251 15 31,2	76 33 14,2

Die Verwandlung der aus der Annäherung III hervorgehenden Zeiten in Stunden, Minuten und Secunden, und ihre Hinzufügung zu $3^u\,45'\,46''$ M. Z. des *ersten*, oder $4^u\,58'\,25''$ des Königsberger Meridians,

ergiebt den Anfang der Finsterniss $= 3^{u}\,36'\,8'',97$, das Ende $= 6^{u}\,3'\,55'',00$. Die Annäherung II hat $0'',47$ und $0'',34$ mehr gegeben; den Positionswinkel um $+12'',2$ und $-4'',4$ fehlerhaft. Dass die Rechnung mit der Annäherung III geschlossen ist, bemerkt man leicht.

Um die Geringfügigkeit des Verlusts an Convergenz der Annäherungen, welchen die Vernachlässigung der Veränderung von d im Differentialquotienten von η, und des Differentialquotienten von $l-i\zeta$ zur Folge hat, anschaulich zu machen, werde ich die dadurch veränderte Annäherung II noch hiehersetzen. Ohne Rücksicht auf diese kleinen Grössen erhält man:

$\frac{d\eta}{d\tau}$	$+\ 0{,}040820$	$+\ 0{,}049262$
N	$71°\ 31'\ 0'',99$	$75°\ 49'\ 41'',49$
$\log . n$	$9{,}6207889$	$9{,}7020167$
ψ	$15'\ 15'',513$	$43'\ 27'',502$
t	$-\ 0{,}06268$	$-\ 0{,}05059$
$N + 180° - \psi$ und $N + \psi$	$251°\ 15'\ 45'',5$	$76°\ 33'\ 9'',0$

woraus hervorgeht, dass der Einfluss der Vernachlässigungen, selbst auf die Annäherung II, welche noch von resp. $3',8$ und $3',0$ fehlerhaften Werthen von τ ausgeht, so gering ist, dass er bei der folgenden Annäherung ganz unmerklich werden muss. Durch die Berücksichtigung der Veränderungen von d und $l-i\zeta$ wird daher wenig oder nichts an der Schnelligkeit der Convergenz der Näherungen gewonnen, wesshalb man sie unterlassen, und dadurch sowohl die Berechnung der Differentialquotienten erleichtern, als auch den Winkel ψ' ganz ersparen kann.

36.

Die *zweite* der beiden §. 34 beschriebenen Anwendungsarten der Auflösung der Gleichung (94), unterscheidet sich dadurch von der verfolgten, dass sie nicht von jeder der Näherungen an die gesuchte Zeit: τ, $\tau_{,}$, τ_2,.... zu der nächstfolgenden, sondern von der ersten derselben zu allen folgenden führt. Wenn die diesen Zeiten zugehörigen Werthe von $x-\xi$, $y-\eta$, $l-i\zeta$ durch $x-\xi$, $x_{,}-\xi_{,}$, $x_2-\xi_2$, ... u. s. w. bezeichnet werden, so sind die Werthe von a', b', c', welche angewandt werden müssen um τ_2 zu erhalten.

$$\frac{x_{,}-x}{\tau_{,}-\tau} - \frac{\xi_{,}-\xi}{\tau_{,}-\tau},\quad \frac{y_{,}-y}{\tau_{,}-\tau} - \frac{\eta_{,}-\eta}{\tau_{,}-\tau},\quad \frac{l_{,}-l}{\tau_{,}-\tau} - \frac{i_{,}\zeta_{,}-i\zeta}{\tau'-\tau},$$

um τ_3 zu erhalten:

$$\frac{x_2-x}{\tau_2-\tau}-\frac{\xi_2-\xi}{\tau_2-\tau},\quad \frac{y_2-y}{\tau_2-\tau}-\frac{\eta_2-\eta}{\tau_2-\tau},\quad \frac{l_2-l}{\tau_2-\tau}-\frac{i_2\zeta_2-i\zeta}{\tau_2-\tau}$$

u. s. w. Die Werthe von a, b, c bleiben die zu τ gehörigen.

Ich werde die Ausdrücke dieser Änderungen hersetzen. Wenn die Entwickelungen von x, y, l nach den Potenzen der Zeit (100):

$$\alpha+\beta t+\gamma t^2+\delta t^3$$

sind, so sind die von diesen Grössen herrührenden Theile von a', b', c':

$$\beta+2\gamma\tau+3\delta.\tau\tau+(\gamma+3\delta\tau)(\tau_{,}-\tau)+\delta(\tau_{,}-\tau)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (102)$$

in welchem Ausdrucke $\tau_2, \tau_3, \ldots$ statt $\tau_{,}$ geschrieben werden müssen, wenn er von τ zu $\tau_3, \tau_4, \ldots$ führen soll. Die von ξ, η, $i\zeta$ herrührenden Theile sind:

$$\varrho\cos\varphi'.\frac{\sin(\mu'_{,}-a_{,}+\omega)-\sin(\mu'-a+\omega)}{\tau_{,}-\tau}$$

$$\varrho\sin\varphi'.\frac{\cos d_{,}-\cos d}{\tau_{,}-\tau}-\varrho\cos\varphi'\frac{\sin d_{,}\cos(\mu'_{,}-a_{,}+\omega)-\sin d\cos(\mu'-a+\omega)}{\tau_{,}-\tau}$$

$$\varrho\sin\varphi'\,\frac{i_{,}\sin d_{,}-i\sin d}{\tau_{,}-\tau}+\varrho\cos\varphi'\,\frac{i_{,}\cos d_{,}\cos(\mu'_{,}-a_{,}+\omega)-i\cos d\cos(\mu'-a+\omega)}{\tau_{,}-\tau}$$

Schreibt man darin $d+u$ und $\mu'-a+v$ statt $d_{,}$ und $\mu'_{,}-a_{,}$, und um abzukürzen U und V statt

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}u}{\tau_{,}-\tau},\quad \frac{2\sin\frac{1}{2}v}{\tau_{,}-\tau},$$

vernachlässigt man auch die immer unbedeutende Veränderung von i, so kann man sie folgendermassen ausdrücken:

$$\left.\begin{array}{l}
\varrho\cos\varphi'\cos(\mu'-a+\omega+\frac{1}{2}v)\,V \\
\varrho\cos\varphi'\sin(\mu'-a+\omega+\frac{1}{2}v)\sin(d+\frac{1}{2}u)\cos\frac{1}{2}u.V \\
\qquad -\varrho\,[\sin\varphi'\sin(d+\frac{1}{2}u)+\cos\varphi'\cos(d+\frac{1}{2}u)\cos(\mu'-a+\omega+\frac{1}{2}v)\cos\frac{1}{2}v]\,U \\
-i\varrho\cos\varphi'\sin(\mu'-a+\omega+\frac{1}{2}v)\cos(d+\frac{1}{2}u)\cos\frac{1}{2}u.V \\
\qquad +i\varrho\,[\sin\varphi'\cos(d+\frac{1}{2}u)-\cos\varphi'\sin(d+\frac{1}{2}u)\cos(\mu'-a+\omega+\frac{1}{2}v)\cos\frac{1}{2}v]\,U
\end{array}\right\}(103)$$

oder, nach unbedeutenden Vernachlässigungen:

$$\left.\begin{array}{l}
\varrho\cos\varphi'\cos(\mu'-a+\omega+\frac{1}{2}v)\,V \\
\varrho\cos\varphi'\sin(\mu'-a+\omega+\frac{1}{2}v)\sin(d+\frac{1}{2}u)\,V \\
\qquad -\varrho\,[\sin\varphi'\sin d+\cos\varphi'\cos d\cos(\mu'-a+\omega+\frac{1}{2}v)]\,U \\
-i\varrho\cos\varphi'\sin(\mu'-a+\omega+\frac{1}{2}v)\cos(d+\frac{1}{2}u)\,V
\end{array}\right\}\ldots\ (103^*)$$

Sowohl v, als u können der Zeit proportional angenommen werden; nämlich, wenn die stündlichen Veränderungen von $\mu'-a$ und d durch $\delta(\mu'-a)$ und δd bezeichnet werden, $v=(\tau_{,}-\tau)\,\delta(\mu_{,}-a)$, $u=(\tau_{,}-\tau)\,\delta d$. Nimmt man $\delta(\mu'-a)$ und δd in Theilen des Radius ausgedrückt an, so wird

$$V=\delta(\mu'-a)-\tfrac{1}{24}\,\delta(\mu'-a)^3(\tau_{,}-\tau)^2+\tfrac{1}{1920}\,\delta(\mu'-a)^5(\tau_{,}-\tau)^4-\&c\ldots$$

U aber einfach $= \delta d$, indem nur das erste Glied des ähnlichen Ausdruckes eine merkliche Grösse erlangen kann. Den Logarithmen von V kann man in eine, der Annahme $\delta(\mu'-a) = 15°$ entsprechende und auch seine Veränderung für jede Secunde von $\delta(\mu'-a) - 15°$ angebende Tafel bringen, deren Argument $\tau_{,}-\tau$ ist.

Diese Methode fordert die Berechnung von $\log m$ und M nur für die Zeit τ, nicht, wie die vorige, ihre Wiederholung für die Zeiten $\tau_{,}$, τ_{2}... Dagegen setzt sie die Berechnung von a', b', c' nach den Ausdrücken (102) und (103*) voraus, deren letztere nicht ganz so einfach sind als die Ausdrücke der Differentialquotienten. In Fällen, in welchen sie so schnell convergirt, dass ihre Anwendung nicht öfter wiederholt werden darf, als die der vorigen Methode, ist sie im Vortheile vor dieser; allein je weiter die Zeit τ von der gesuchten Zeit der Ränderberührung entfernt ist, desto langsamer wird ihre Convergenz. Will man z. B. eine Sonnenfinsterniss bis auf das Hundertel der Secunde richtig berechnen, indem man alle aufeinanderfolgenden Näherungen von *einem* Werthe von τ anfangen lässt, welcher etwa der Mitte der Finsterniss entspricht und von den gesuchten Momenten bis auf anderthalb Stunden oder mehr entfernt sein kann, so wird der Verlust an Convergenz der aufeinanderfolgenden Näherungen, den Vortheil in der Ausführung jeder von ihnen, welchen die gegenwärtige Methode vor der vorigen voraus hat, wenigstens aufwiegen. Will man dagegen die Berechnung des Anfanges und des Endes, von *den beiden*, durch die *erste* Annäherung bekanntgewordenen Werthen von τ anfangen lassen, so wird dieser Vortheil mit hinreichend schneller Convergenz zusammentreffen. Die Annäherung II wird dann nach der vorigen Methode gesucht, also genau so wie sie §. 35, in dem zum Beispiele gewählten Falle, durch Rechnung erlangt worden ist; die darauf folgende (III) lässt aber m und M ungeändert, indem ihr dagegen Werthe von a', b', c', so wie die Formeln (102) und (103*) sie ergeben, zum Grunde gelegt werden. — Auf diese Art wird man am leichtsten zur Kenntniss der beiden Zeiten gelangen, welche den Elementen der Rechnung zufolge, den Ränderberührungen zugehören. Will man diese Zeiten nur innerhalb einiger Secunden sicher kennen lernen, so wird man sich mit *einer* Anwendung der gegenwärtigen Methode auf jede von ihnen begnügen, indem man τ so wie es der *ersten* Annäherung zum Grunde gelegt worden ist, und für $\tau_{,}$ die beiden aus dieser hervorgegangenen Zeiten annimmt.

37.

Die gegenwärtige Methode empfiehlt sich vorzüglich in dem Falle der Bedeckungen der Fixsterne durch den Mond. In diesem Falle ist l beständig, nämlich der in Theilen des Aequatorealhalbmessers ausgedrückte Halbmesser des Mondes; i verschwindet und a, d sind nicht von der Geradenaufsteigung und Abweichung des Fixsterns verschieden, also während der Dauer der Finsterniss nicht merklich veränderlich. Hierdurch ziehen sich die beiden ersten der Ausdrücke (103) in folgende zusammen:

$$\varrho \cos\varphi' \cos(\mu' - a + \omega + \tfrac{1}{2}v)\, V$$
$$\varrho \cos\varphi' \sin(\mu' - a + \omega + \tfrac{1}{2}v) \sin d \,.\, V$$

und der dritte verschwindet; v bedeutet nach und nach die in Kreistheilen ausgedrückte, $\tau_{,} - \tau$, $\tau_2 - \tau$, ... entsprechende Sternenzeit und $\log V$ kann in eine für alle Sternbedeckungen geltende Tafel gebracht werden, welche ich hier folgen lasse. Die Formeln (101) sind nun *vollständig* und daher nicht allein bei der ersten Annäherung, sondern auch bei allen folgenden anzuwenden. Endlich wird die geringere Dauer der Sternbedeckungen die Ursache, dass, von *einem* etwa der Mitte der Erscheinung entsprechenden Werthe von τ ausgehende aufeinanderfolgende Näherungen schnell genug convergiren um die alleinige Anwendung dieser Methode zu empfehlen, selbst wenn die Erlangung vollständiger Genauigkeit das Ziel der Rechnung ist.

Wenn die astronomischen Ephemeriden, auch in Beziehung auf Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen, das Bedürfniss der Beobachter befriedigen sollen, so müssen sie, für eine der Mitte der Erscheinung sich nähernde Zeit τ, die Werthe der Grössen

$$x,\ y,\ l;\ \ x',\ y';\ \ \mu' - a,\ d$$

angeben. Wenn die Zeiten des Anfanges und Endes, so wie auch die Örter am Sonnen- oder Mondrande, wo beide erfolgen, insoweit bestimmt werden sollen, dass ein Beobachter an einem durch φ und ω gegebenen Orte näherungsweise erfährt, wenn und wo er beide Erscheinungen zu erwarten hat, so muss er

$$\xi,\ \eta,\ \frac{d\xi}{d\tau},\ \frac{d\eta}{d\tau}$$

berechnen und die Formeln (101) anwenden. Die daraus hervorgehenden Zeiten des ersten Meridians des Anfanges und Endes, müssen, durch Hinzufügung des Mittagsunterschiedes, auf den Meridian des gegebenen Ortes bezogen werden. — Sollte eine stärkere Näherung wünschenswerth sein, so wird man sie leicht genug durch die *zweite* Methode erlangen.

Tafel für *log*. *V* und *v*

für die Bedeckungen der Fixsterne.

$\tau_{,}-\tau$	log. *V*	$\frac{1}{2}v$	$\tau_{,}-\tau$	log. *V*	$\frac{1}{2}v$	$\tau_{,}-\tau$	log. *V*	$\frac{1}{2}v$
		° ′ ″			° ′ ″			° ′ ″
0,00	9,419156	0 0 0,0	0,50	9,418844	3 45 37,0	1,00	9,417909	7 31 13,9
0,01	9156	0 4 30,7	0,51	8831	3 50 7,7	1,01	7884	7 35 44,7
0,02	9156	0 9 1,5	0,52	8819	3 54 38,4	1,02	7858	7 40 15,4
0,03	9155	0 13 32,3	0,53	8806	3 59 9,2	1,03	7833	7 44 46,1
0,04	9154	0 18 3,0	0,54	8792	4 3 39,9	1,04	7807	7 49 16,9
0,05	9153	0 22 33,7	0,55	8779	4 8 10,7	1,05	7781	7 53 47,6
0,06	9152	0 27 4,4	0,56	8765	4 12 41,4	1,06	7754	7 58 18,4
0,07	9150	0 31 35,2	0,57	8751	4 17 12,1	1,07	7728	8 2 49,1
0,08	9148	0 36 5,9	0,58	8736	4 21 42,9	1,08	7702	8 7 19,8
0,09	9146	0 40 36,7	0,59	8722	4 26 13,6	1,09	7674	8 11 50,6
0,10	9144	0 45 7,4	0,60	8707	4 30 44,4	1,10	7647	8 16 21,3
0,11	9141	0 49 38,1	0,61	8692	4 35 15,1	1,11	7619	8 20 52,1
0,12	9138	0 54 8,9	0,62	8677	4 39 45,8	1,12	7591	8 25 22,8
0,13	9135	0 58 39,6	0,63	8661	4 44 16,6	1,13	7563	8 29 53,5
0,14	9132	1 3 10,4	0,64	8645	4 48 47,3	1,14	7535	8 34 24,3
0,15	9128	1 7 41,1	0,65	8629	4 53 18,1	1,15	7506	8 38 55,0
0,16	9124	1 12 11,8	0,66	8613	4 57 48,8	1,16	7477	8 43 25,8
0,17	9120	1 16 42,6	0,67	8596	5 2 19,5	1,17	7448	8 47 56,5
0,18	9116	1 21 13,3	0,68	8579	5 6 50,3	1,18	7419	8 52 27,2
0,19	9111	1 25 44,1	0,69	8562	5 11 21,0	1,19	7390	8 56 58,0
0,20	9106	1 30 14,8	0,70	8545	5 15 51,7	1,20	7360	9 1 28,7
0,21	9101	1 34 45,5	0,71	8527	5 20 22,5	1,21	7330	9 5 59,5
0,22	9096	1 39 16,3	0,72	8509	5 24 53,2	1,22	7299	9 10 30,2
0,23	9090	1 43 47,0	0,73	8491	5 29 24,0	1,23	7269	9 15 0,9
0,24	9084	1 48 17,7	0,74	8473	5 33 54,7	1,24	7238	9 19 31,7
0,25	9078	1 52 48,5	0,75	8454	5 38 25,4	1,25	7207	9 24 2,4
0,26	9072	1 57 19,2	0,76	8436	5 42 56,2	1,26	7175	9 28 33,2
0,27	9065	2 1 50,0	0,77	8417	5 47 26,9	1,27	7144	9 33 3,9
0,28	9058	2 6 20,7	0,78	8397	5 51 57,7	1,28	7112	9 37 34,6
0,29	9051	2 10 51,4	0,79	8378	5 56 28,4	1,29	7080	9 42 5,4
0,30	9044	2 15 22,2	0,80	8358	6 0 59,1	1,30	7048	9 46 36,1
0,31	9036	2 19 52,9	0,81	8338	6 5 29,9	1,31	7015	9 51 6,8
0,32	9028	2 24 23,7	0,82	8317	6 10 0,6	1,32	6982	9 55 37,6
0,33	9020	2 28 54,4	0,83	8297	6 14 31,4	1,33	6949	10 0 8,3
0,34	9012	2 33 25,1	0,84	8276	6 19 2,1	1,34	6916	10 4 39,1
0,35	9003	2 37 55,9	0,85	8255	6 23 32,8	1,35	6882	10 9 9,8
0,36	8994	2 42 26,6	0,86	8234	6 28 3,6	1,36	6848	10 13 40,5
0,37	8985	2 46 57,4	0,87	8212	6 32 34,3	1,37	6814	10 18 11,3
0,38	8976	2 51 28,1	0,88	8190	6 37 5,1	1,38	6780	10 22 42,0
0,39	8966	2 55 58,8	0,89	8168	6 41 35,8	1,39	6746	10 27 12,8
0,40	8956	3 0 29,6	0,90	8146	6 46 6,5	1,40	6711	10 31 43,5
0,41	8946	3 5 0,3	0,91	8123	6 50 37,3	1,41	6676	10 36 14,2
0,42	8936	3 9 31,1	0,92	8100	6 55 8,0	1,42	6640	10 40 45,0
0,43	8925	3 14 1,8	0,93	8077	6 59 38,8	1,43	6605	10 45 15,7
0,44	8915	3 18 32,5	0,94	8054	7 4 9,5	1,44	6569	10 49 46,5
0,45	8903	3 23 3,3	0,95	8030	7 8 40,2	1,45	6533	10 54 17,2
0,46	8892	3 27 34,0	0,96	8006	7 13 11,0	1,46	6497	10 58 47,9
0,47	8881	3 32 4,8	0,97	7982	7 17 41,7	1,47	6460	11 3 18,7
0,48	8869	3 36 35,5	0,98	7958	7 22 12,5	1,48	6423	11 7 49,4
0,49	8857	3 41 6,2	0,99	7934	7 26 43,2	1,49	6386	11 12 20,2
0,50	8844	3 45 37,0	1,00	7909	7 31 13,9	1,50	6349	11 16 50,9

Vierter Abschnitt.

Anwendung der Beobachtungen der Finsternisse.

38.

Die Beobachtungen der Finsternisse gewähren der Astronomie so wichtige Resultate, dass die Entwickelung der Verbindungen zwischen beiden die Aufgabe häufiger Bemühungen gewesen ist, welche jedoch die Materie noch nicht so vollständig erschöpfen, dass der gegenwärtige Abschnitt als überflüssig angesehen werden dürfte. Sie sind ein höchst schätzbares Mittel zur Bestimmung des Mittagsunterschiedes der Örter wo sie gemacht werden; ein Mittel, welches desto häufigere Anwendung findet, je weniger Apparat und vorbereitende Einrichtungen diese fordert. Sie bestimmen, in geeigneten Fällen, den relativen Ort des verfinsternden Gestirns mit einer Sicherheit, welche anderweitig schwer zu erreichen ist. Sie haben endlich zur Bestimmung der Grösse der Sonnenparallaxe geführt. — Diese letztere Anwendung der Beobachtungen der Finsternisse werde ich hier nicht besonders verfolgen; allein, welche Anwendung derselben auch beabsichtigt werden mag, so muss ihre Theorie immer von der Gleichung ausgehen, welche die Verbindung der Elemente einer Finsterniss und der zur Bestimmung eines Punktes auf der Erde erforderlichen ω, φ, mit den an diesem Punkte stattfindenden Zeiten der Ränderberührung ausdrückt; also von derselben Gleichung:

$$(l-i\zeta)^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (104)$$

welche ich zur Grundlage aller, in dieser Abhandlung durchgeführten Untersuchungen gemacht habe.

Ich werde aus dieser Gleichung den Ausdruck des Mittagsunterschiedes (ω) eines Ortes ableiten, wo die Zeit einer Ränderberührung durch Beobachtung bekannt geworden ist. Gegeben ist also diese Zeit, und zwar soll sie sowohl in mittlerer als in Sternenzeit ausgedrückt als bekannt angenommen werden; gegeben ist ferner die Polhöhe (φ) des Beobachtungsortes. Sämmtliche Elemente der Finsterniss x, y, l, i, a, d nehme ich, für Zeiten des ersten Meridians, welche von Stunde zu Stunde mittlerer Zeit fortschreiten, in derselben Art aus den Angaben

der Tafeln oder Ephemeriden berechnet an, in welcher der 4[te] § sie für die Sonnenfinsterniss des 15[ten] May 1836 enthält; auch werde ich die Werthe der vier letzten dieser Elemente, welche in dem Falle der Fixsternbedeckungen unveränderlich sind, in allen anderen Fällen aber nur sehr langsame Änderungen erfahren, allgemein als für die Beobachtungszeit bekannt voraussetzen. Um aber die Fehler der Angaben, welche der Berechnung von x, y, l zum Grunde liegen, nicht zu vernachlässigen, werde ich diesen Grössen unbestimmte Änderungen Δx, Δy, Δl hinzusetzen und ihren Einfluss auf den Ausdruck von ω untersuchen. Ähnliche, sich auf i, a, d beziehende unbestimmte Änderungen, werde ich nicht in die Rechnung aufnehmen, weil ihr (immer unbedeutender) Einfluss nicht durch die Beobachtungen einer Finsterniss bestimmt werden kann. Aber den Einfluss einer kleinen unbestimmten Änderung Δee des Quadrats der, in den Werthen von ξ, η, ζ enthaltenen, Excentricität der Erdmeridiane werde ich berücksichtigen.

Wenn die mittlere Zeit der Beobachtung durch t, die ihr gleichgeltende Zeit des ersten Meridians also durch $t-\omega$ bezeichnet wird, und τ eine willkürliche, sich dieser jedoch insofern nähernde Zeit desselben Meridians bedeutet, dass x und y, während der Zwischenzeit $t-\omega-\tau$ Änderungen erfahren, welche ihr näherungsweise proportional angenommen werden können, so können die, der Beobachtungszeit entsprechenden Werthe dieser Grössen in der Form:

$$x_0 + x'(t-\omega-\tau) + \Delta x, \quad y_0 + y'(t-\omega-\tau) + \Delta y$$

dargestellt werden, in welcher x_0, y_0 der Zeit τ zugehören und die von der Zwischenzeit abhängigen, also unbekannten x', y', der Voraussetzung gemäss, näherungsweise bekannt sind.

Diesen Annahmen und Erklärungen gemäss nimmt die Gleichung (104) die Form an, in welcher sie zur unmittelbaren Bestimmung von ω geeignet ist. Sie wird nämlich:

$$\left\{l-i\zeta+\Delta l-\frac{id\zeta}{d.ee}\Delta ee\right\}^2 = \left\{x_0-\xi+x'(t-\omega-\tau)+\Delta x-\frac{d\xi}{d.ee}\Delta ee\right\}^2 + \left\{y_0-\eta+y'(t-\omega-\tau)+\Delta y-\frac{d\eta}{d.ee}\Delta ee\right\}^2$$

allein man kann das Product $i\Delta ee$, welches in dem Falle der Fixsternbedeckungen verschwindet und in allen anderen Fällen unbedeutend wird,

ohne dadurch einen in Betracht kommenden Fehler zu begehen, allgemein vernachlässigen, also statt dieser Gleichung:

$$(l-i\zeta+\Delta l)^2 = \left\{x_0-\xi+x'(t-\omega-\tau)+\Delta x-\frac{d\xi}{d.ee}\Delta ee\right\}^2$$
$$+\left\{y_0-\eta+y'(t-\omega-\tau)+\Delta y-\frac{d\eta}{d.ee}\Delta ee\right\}^2 \;\ldots\ldots (105)$$

anwenden. Ihre Auflösung führt von den vorausgesetzten, näherungsweise bekannten Werthen von x' und y', zu einer *ersten* Bestimmung von $t-\omega-\tau$; diese ergiebt verbesserte Werthe von x' und y' und dadurch eine *zweite* Bestimmung u. s. w. Die Convergenz dieser aufeinanderfolgenden Näherungen ist aber so gross, dass man, bei gehöriger Anordnung ihrer Anwendung, nie über die erste hinauszugehen braucht.

Bestimmt man m, M, n, N nach den Formeln

$$m\sin M = x_0-\xi \qquad n\sin N = x'$$
$$m\cos M = y_0-\eta \qquad n\cos N = y'$$

so kann man die Gleichung

$$(l-i\zeta+\Delta l)^2 = \left\{n(t-\omega-\tau)+m\cos(M-N)+\Delta x\sin N+\Delta y\cos N-\frac{d(\xi\sin N+\eta\cos N)}{d.ee}\Delta ee\right\}^2$$
$$+\left\{m\sin(M-N)+\Delta x\cos N+\Delta y\sin N-\frac{d(\xi\cos N-\eta\sin N)}{d.ee}\Delta ee\right\}^2$$

schreiben; oder wenn man, um abzukürzen

$$\lambda = \Delta x\sin N+\Delta y\cos N-\frac{d(\xi\sin N+\eta\cos N)}{d.ee}\Delta ee$$
$$\lambda' = -\Delta x\cos N+\Delta y\sin N+\frac{d(\xi\cos N-\eta\sin N)}{d.ee}\Delta ee$$

setzt:

$$(l-i\zeta+\Delta l)^2 = \left\{n(t-\omega-\tau)+\lambda+m\cos(M-N)\right\}^2+\left\{m\sin(M-N)-\lambda'\right\}^2 \;..\; (106)$$

Wenn Δl und λ' vergleichungsweise mit $l-i\zeta$ sehr kleine Grössen sind und man ψ durch

$$\sin\psi = \frac{m}{L}\sin(M-N)$$

bestimmt, wo L, um abzukürzen, für $l-i\zeta$ geschrieben ist, so folgt hieraus

$$t-\omega-\tau = \frac{-m}{n}\cos(M-N)-\frac{L}{n}\cos\psi-\frac{\Delta l}{n}\sec\psi-\frac{\lambda'}{n}\operatorname{tang}\psi-\frac{\lambda}{n}$$

oder

$$\omega = t-\tau+\frac{m}{n}\cos(M-N)+\frac{L}{n}\cos\psi+\frac{\lambda}{n}+\frac{\lambda'}{n}\operatorname{tang}\psi+\frac{\Delta l}{n}\sec\psi \;\ldots\; (107)$$

wofür auch, mit Ausnahme eines sehr kleinen, oder verschwindenden Werthes von $\sin\psi$,

$$\omega = t - \tau + \frac{m}{n}\,\frac{\sin(M-N+\psi)}{\sin\psi} + \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda'}{n}\operatorname{tang}\psi + \frac{\Delta l}{n}\sec\psi \;.\;.\;.\;.\;.\; (107^*)$$

angewandt werden kann. Diese Formeln bestimmen ω in Theilen der Stunde ausgedrückt; um seinen auf gewöhnliche Art ausgedrückten Werth zu erhalten, muss man auch t und τ so ausdrücken und die übrigen Glieder in 3600 multipliciren.

39.

Diese Ausdrücke von ω sind *zweideutig*, da ψ ebensowohl ein spitzer als ein stumpfer Winkel sein kann, indem er nur durch seinen Sinus bestimmt wird. Es muss daher untersucht werden, wie über diese Zweideutigkeit in jedem Falle zu entscheiden ist. — Jenachdem die Ränderberührung dem Anfange oder dem Ende der Finsterniss zugehört, muss die Summe der beiden Quadrate auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens weniger dem Quadrate auf der linken (105) in dem ihr folgenden Momente negativ oder positiv, oder der in Beziehung auf die Zeit genommene Differentialquotient dieses Unterschiedes muss negativ oder positiv sein. Da aber der Differentialquotient des letzten Quadrats, welcher in dem Falle der Fixsternbedeckungen verschwindet, in allen anderen Fällen sehr klein ist, er also das *Zeichen* des Differentialquotienten des ganzen Ausdruckes nur in Fällen ändern kann, in welchen auch der Differentialquotient der Summe der beiden ersteren Quadrate sehr klein ist, dann aber die aufgenommenen kleinen unbestimmten Grössen sein Zeichen willkürlich machen, auch diese Fälle zur Bestimmung von ω unbrauchbar sind, so kann man eine kleine Vernachlässigung als unbedeutend betrachten und als Unterscheidungszeichen des Anfanges oder Endes annehmen, dass der Differentialquotient von

$$\left\{x_0 - \xi + x'(t-\omega-\tau)\right\}^2 + \left\{y_0 - \eta + y'(t-\omega-\tau)\right\}^2$$

negativ oder positiv ist. Die Hälfte dieses Differentialquotienten hat den Ausdruck:

$$\left\{x_0 - \xi + x'(t-\omega-\tau)\right\}\left(x' - \frac{d\xi}{dt}\right) + \left\{y_0 - \eta + y'(t-\omega-\tau)\right\}\left(y' - \frac{d\eta}{dt}\right),$$

welcher, durch Substitution des Ausdruckes (107) von $t-\omega-\tau$, in

$$L\left[\sin(\psi - N)\left(x' - \frac{d\xi}{dt}\right) - \cos(\psi - N)\left(y' - \frac{d\eta}{dt}\right)\right]$$

übergeht. Schreibt man darin $n \sin N$ und $n \cos N$ statt x' und y', so wird er ferner

$$-L\left[\left(n-\frac{d\xi}{dt}\sin N-\frac{d\eta}{dt}\cos N\right)\cos\psi+\left(\frac{d\xi}{dt}\cos N-\frac{d\eta}{dt}\sin N\right)\sin\psi\right]$$

und bestimmt man n', N' durch die Formeln

$$n'\cos N' = n-\frac{d\xi}{dt}\sin N-\frac{d\eta}{dt}\cos N$$
$$n'\sin N' = \frac{d\xi}{dt}\cos N-\frac{d\eta}{dt}\sin N$$

in welchen n' positiv genommen wird, so wird er endlich:

$$-L\,n'\cos(\psi-N')$$

Hieraus geht hervor, dass, wenn $L=l-i\zeta$ positiv, also die Ränderberührung eine äussere, oder eine einer ringförmigen Finsterniss zugehörige innere ist, ψ für den Anfang so genommen werden muss, dass $\cos(\psi-N')$ positiv, für das Ende so, dass derselbe Cosinus negativ wird; oder dass ψ für den Anfang zwischen $N'-90^\circ$ und $N'+90^\circ$, für das Ende zwischen $N'+90^\circ$ und $N'+270^\circ$ genommen werden muss. In dem Falle eines negativen Werthes von $l-i\zeta$, welcher nur bei gänzlichen Finsternissen vorkommt, muss ψ für den Anfang zwischen den beiden letzten, für das Ende zwischen den beiden ersten Grenzen genommen werden.

Die Formeln, aus welchen N' hervorgeht, können noch weiter entwickelt werden, indem statt der Differentialquotienten von ξ und η ihre Ausdrücke:

$$\frac{d\xi}{dt} = \varrho\cos\varphi'\cos(\mu-a)\frac{d(\mu-a)}{dt}$$
$$\frac{d\eta}{dt} = \varrho\cos\varphi'\sin(\mu-a)\frac{d(\mu-a)}{dt}\sin d-\zeta\frac{dd}{dt}$$

gesetzt werden. Dadurch erhält man

$$\left.\begin{aligned} n'\cos N' &= n-\varrho\cos\varphi'[\cos(\mu-a)\sin N+\sin(\mu-a)\cos N\sin d]\frac{d(\mu-a)}{dt}+\zeta\cos N\frac{dd}{dt}\\ n'\sin N' &= \varrho\cos\varphi'[\cos(\mu-a)\cos N-\sin(\mu-a)\sin N\sin d]\frac{d(\mu-a)}{dt}+\zeta\sin N\frac{dd}{dt}\end{aligned}\right\}(108)$$

worin jedoch die von $\frac{dd}{dt}$ abhängigen Glieder nur in seltenen und zur Bestimmung von ω unbrauchbaren Fällen, in Betracht kommen können. Gewöhnlich wird man keine Veranlassung haben, die Entscheidung über die Zweideutigkeit der Formeln (107) auf diese Art zu suchen, indem man ω nahe genug kennen wird um über die zu treffende Wahl nicht zweifelhaft zu bleiben.

40.

Ich muss noch Einiges von den Voraussetzungen sagen, welche im 38ten § gemacht worden sind. Als *gegeben* angenommen sind sowohl die mittlere Zeit, als auch die Sternenzeit der Ränderberührung und die ihr zugehörigen Werthe von l, i, a, d, während wenigstens einer der beiden Ausdrücke der Zeit und diese Werthe, nicht ohne die Kenntniss des Mittagsunterschiedes gefunden werden können, diese Kenntniss also *vorausgesetzt*, und daher die §. 38 gegebene Bestimmung des Mittagsunterschiedes keine *directe* ist. Zwar ist dieses kein erhebliches Hinderniss der Anwendung, indem der Mittagsunterschied nicht leicht so weit zweifelhaft sein wird, dass seine Kenntniss nicht hinreichte, die der Beobachtungszeit zugehörigen Werthe der vorausgesetzten, sich langsam verändernden Grössen, mit der erforderlichen Genauigkeit zu ergeben; allein in Beziehung auf die Theorie selbst wird es doch einiges Interesse haben, zu zeigen, wie sie vervollständigt werden muss, damit sie den Mittagsunterschied *direct* bestimme.

Durch unmittelbare Beobachtung kann man entweder die Sternenzeit oder die wahre Sonnenzeit bestimmen, die mittlere Zeit kann man aber nur aus der einen oder der anderen, unter der Voraussetzung der Kenntniss des Mittagsunterschiedes berechnen. Ich werde zuerst annehmen, dass die *Sternenzeit* bestimmt sei. Damit ist der in ξ, η, ζ enthaltene Werth von μ gegeben. Die Werthe von l, i, a, d für die Zeit der Beobachtung sind.

$$l_0 + l'(t-\omega-\tau),\quad i_0 + i'(t-\omega-\tau),\quad a_0 + a'(t-\omega-\tau),\quad d_0 + d'(t-\omega-\tau)$$

in welchen Ausdrücken l_0, i_0, a_0, d_0 der Zeit τ zugehören, und die ihnen hinzugesetzten Grössen ihre Änderungen zwischen dieser und der Beobachtungszeit bedeuten. Wenn man unter ξ, η, ζ die Werthe dieser Grössen versteht, welche die Annahme von a, d für die Zeit τ ergiebt, wird die *vollständige* Gleichung, durch deren Auflösung $t-\omega-\tau$ bestimmt wird:

$$\left.\begin{aligned}&\left[l_0 - i_0\zeta + \left(l' - i'\zeta + i\frac{d\zeta}{d\mu}a' - i\frac{d\zeta}{dd}d'\right)(t-\omega-\tau) + \Delta l\right]^2\\ &\quad = \left[x_0 - \xi + \left(x' + \frac{d\xi}{d\mu}a'\right)(t-\omega-\tau) + \Delta x - \frac{d\xi}{d.ee}\Delta ee\right]^2\\ &\quad + \left[y_0 - \eta + \left(y' + \frac{d\eta}{d\mu}a' - \frac{d\eta}{dd}d'\right)(t-\omega-\tau) + \Delta y - \frac{d\eta}{d.ee}\Delta ee\right]^2\end{aligned}\right\}\ldots(109)$$

und $t-\omega-\tau$ wird daraus, nach den §. 33 entwickelten Formeln gefunden;

allein die im ersten Gliede enthaltene, von der Zeit abhängige Grösse, ist immer so klein, dass kein Fall vorkommen wird, in welchem sie nicht als hinreichend genau bekannt angenommen werden könnte, wodurch die Auflösung auf die einfachere Formel §. 38 zurückkommt. Indem die Sternenzeit des ersten Meridians $= \mu - \omega$ ist, ist sie von der mittleren Zeit τ, wenn die dieser entsprechende Sternenzeit durch μ_0 bezeichnet wird, $\mu - \omega - \mu_0$ entfernt, oder die unbekannte Grösse der Gleichung ist

$$t - \omega - \tau = \frac{\mu - \omega - \mu_0}{h}$$

wo, vorausgesetzt, dass $\mu - \omega - \mu_0$ in Secunden ausgedrückt ist, h die Anzahl Sternensecunden bedeutet, welche eine mittlere Stunde enthält, also $h = 3609'',85647$. Wenn die Auflösung der Gleichung $t - \omega - \tau = U$ ergiebt, wird also

$$\omega = \mu - \mu_0 - h.U$$

der gesuchte, von den gemachten Voraussetzungen gänzlich befreiete Ausdruck des Mittagsunterschiedes. — In dem Falle der Fixsternbedeckungen verschwinden i, l', i', a', d'; wesshalb, unter der Voraussetzung ihrer Beobachtung nach *Sternenzeit*, die Formeln (107) ω *direct* bestimmen, falls darin $\mu - \mu_0$ statt $t - \tau$ gesetzt, i weggelassen, und ihre auf $\mu - \mu_0$ folgenden Glieder in h multiplicirt werden.

Wenn die beobachtete Zeit der Ränderberührung *wahre Sonnenzeit* ist und durch t' bezeichnet wird, so wie die Geradeaufsteigung der Sonne zur Zeit τ durch α_0, und zur Beobachtungszeit durch $\alpha_0 + \alpha'(t - \omega - \tau)$, so ist

$$\mu = t' + \alpha_0 + \alpha'(t - \omega - \tau)$$

und

$$\mu - a = t' + \alpha_0 - a_0 + (\alpha' - a')(t - \omega - \tau)$$

Man erhält daher die dieser Annahme angemessene *vollständige* Gleichung, indem man in der vorigen (109) $a' - \alpha'$ statt a' schreibt, unter ξ, η, ζ aber die Werthe dieser Grössen versteht, welche $\mu = t' + \alpha_0$, so wie den zu τ gehörigen Werthen von a, d entsprechen. Indem die wahre Zeit des ersten Meridians $= t' - \omega$ ist, ist sie von der mittleren Zeit τ, wenn die dieser entsprechende wahre Zeit durch τ' bezeichnet wird, $t' - \omega - \tau'$ entfernt, oder die unbekannte Grösse der Gleichung ist

$$t - \omega - \tau = \frac{t' - \omega - \tau'}{h}$$

wo, vorausgesetzt dass $t'-\omega-\tau'$ in Secunden ausgedrückt ist, h jetzt die Anzahl wahrer Secunden bedeutet, welche eine mittlere Stunde enthält. Man hat also

$$\omega = t'-\tau'-hU$$

In dem Falle der Sonnenfinsternisse sind α' und a' kaum voneinander verschieden, wodurch die a' enthaltenden Theile der Gleichung (109) unter der gegenwärtigen Voraussetzung unerheblich werden. In dem Falle der Fixsternbedeckungen sind die Formeln (107) vollständig, falls

$$n \sin N = x' - \frac{d\xi}{d\mu}\alpha'$$
$$n \cos N = y' - \frac{d\eta}{d\mu}\alpha'$$

angenommen, ihre auf $t-\tau$ folgenden Glieder in h multiplicirt, i weggelassen und $t'-\tau'$ statt $t-\tau$ geschrieben werden.

Wenn auch wohl nie Veranlassung vorhanden sein wird, die in diesem § gegebene Vervollständigung der Gleichung (105) in der Anwendung zu berücksichtigen, so wird doch die gemachte Bemerkung, dass es unnöthig ist, die angegebene wahre Zeit oder Sternenzeit einer Beobachtung, vor ihrer Berechnung, in mittlere Zeit zu verwandeln, dem Rechner diese — freilich nicht sehr erhebliche — Mühe ersparen. Wenn eine Ephemeride die Örter der Gestirne für wahre Zeiten angiebt, so wird die Berechnung der Werthe von x, y, l u. s. w. für Zeiten, welche eine Stunde wahrer Zeit voneinander entfernt sind, leichter als für mittlere Zeiten; dass die Beobachtungen der Finsterniss, deren Elemente diese Werthe sind, desshalb nicht von einer anderen Art der Zeitangabe auf diese reducirt werden dürfen, geht gleichfalls aus der gemachten Bemerkung hervor.

41.

Obgleich x' und y' während der Dauer einer Finsterniss sich so wenig ändern, dass die Formeln (107) sehr nahe an die Wahrheit führen, selbst wenn $t-\omega-\tau$ einige Stunden beträgt und statt x' und y' die Werthe der Differentialquotienten von x und y zur Zeit τ angenommen werden; obgleich also eine sehr schnelle Convergenz wiederholter Anwendungen dieser Formeln erlangt wird, wenn ihre erste Anwendung auch von einem so weit von der Beobachtungszeit entfernten Werthe von τ ausgeht, die zweite aber für x' und y' die Differenzenquotienten

von x und y zwischen τ und dem durch die erste ergebenen Werthe von $t-\omega$ annimmt u. s. w., so ist es doch vortheilhaft, die Rechnung so anzuordnen, dass $t-\omega-\tau$ nicht sehr gross wird. Je kleiner diese Zwischenzeit ist, desto genauer kann sie nämlich durch logarithmische Rechnung gefunden werden; auch vermehrt diese Kleinheit die Convergenz, allein diese wird immer gross genug sein, um von der näherungsweisen Kenntniss des Werthes von $t-\omega-\tau$, welche in jedem Falle vorhanden sein wird, durch *eine* Rechnung der Wahrheit so stark zu nähern, dass die Veranlassung einer zweiten nicht vorhanden ist.

Gewöhnlich wird man mehrere Beobachtungen einer Finsterniss, sowohl ihres Anfanges und Endes, als an verschiedenen Orten gemachte, zu berechnen haben, und dadurch gezwungen werden, falls man allen *eine* Annahme von τ zum Grunde legen will, diese von einigen der Beobachtungszeiten weiter zu entfernen. Will man dagegen τ so nahe als möglich an jede Beobachtungszeit verlegen, so muss man ihm für jede Beobachtung einen anderen Werth geben, und zwar den Werth $t-\omega$, indem man ω so annimmt, wie es vor der Beobachtung bekannt geworden sein mag. Ich werde beide Verfahrungsarten hier durchgehen.

I. Will man der Berechnung aller Beobachtungen *einen* Werth von τ zum Grunde legen, so wird man dasjenige der von Stunde zu Stunde fortschreitenden Zeitmomente für welche man die Elemente der Finsterniss berechnet hat, welches der Mitte aller Beobachtungszeiten am nächsten kommt, als τ annehmen, oder, wenn diese Elemente erst nach dem Bekanntwerden der Beobachtungen aufgesucht werden, wird man die Zeiten, für welche man sie berechnet, von ohngefähr der Mitte der Beobachtungszeiten an, vor- und rückwärts zählen. Berechnet man dann $\log n$ und N von Stunde zu Stunde, nach den Formeln §. 30:

$$\begin{array}{llll}
\text{für } \tau-3^h & n\sin N = \tfrac{1}{3}(x_0-x_{-3}); & n\cos N = \tfrac{1}{3}(y_0-y_{-3}) \\
\tau-2 & \ldots\ldots \tfrac{1}{2}(x_0-x_{-2}) & \ldots\ldots \tfrac{1}{2}(y_0-y_{-2}) \\
\tau-1 & \ldots\ldots x_0-x_{-1} & \ldots\ldots y_0-y_{-1} \\
\tau & \ldots\ldots b-\tfrac{1}{6}d. & \ldots\ldots b-\tfrac{1}{6}d \\
\tau+1 & \ldots\ldots x_{,}-x_0 & \ldots\ldots y_{,}-y_0
\end{array}$$

u. s. w.

so kann man daraus, durch Interpolation für jede Zeit $t-\omega$, die Werthe dieser Grössen bestimmen, welche die Formeln (107) voraussetzen. Jede Beobachtung fordert dann

1) die Aufsuchung von a, d, l, $\log.i$, $\log n$, N für die Zeit $t-\omega$, worin ω der Wahrheit so nahe angenommen wird, als man es vor der Beobachtung kennt (für Fixsternbedeckungen sind a, d, l beständig und i verschwindet);

2) die Berechnung von ξ, η, ζ und damit $\log m$ und M (für Fixsternbedeckungen wird ζ nicht gebraucht)

3) die Berechnung einer der beiden Formeln (107).

Eine zweite Annäherung an den Werth von ω, würde auf den aus der ersten hervorgegangenen gegründet werden; allein sie wird nie nöthig sein wenn der dieser zum Grunde gelegte bis auf einige Zeitminuten richtig ist. Im Falle der Fixsternbedeckungen würde sie übrigens nur in dem 3ten Theile der Rechnung eine Änderung hervorbringen.

Die ganze Dauer einer Sonnenfinsterniss für die Erde kann über 6 Stunden, die einer Fixsternbedeckung fast 5 Stunden betragen, wäre die eine oder die andere in der ganzen Ausdehnung des ihre Sichtbarkeit begrenzenden Raumes auf der Erde beobachtet, so würden Werthe von $t-\omega-\tau$ bis auf 2 bis 3 Stunden steigen können, und man würde wohl nicht bequem finden, so grosse Werthe logarithmisch zu berechnen. In diesem Falle würde man vorziehen, *zwei* Werthe von τ, den einen den früheren, den anderen den späteren Beobachtungen zum Grunde zu legen, und also $\log n$ und N von beiden ausgehend aufzusuchen. Man könnte auch, wenn man der Kleinheit des aus der Berechnung der Formeln (107) hervorgehenden $t-\omega-\tau$ noch grösseres Gewicht beilegen wollte, jede der Zeiten, für welche man die Elemente der Finsterniss berechnet hat, für die ihr nächsten Beobachtungen als τ annehmen.

II. Will man der Berechnung jeder Beobachtung einen ihr möglichst nahen Werth von τ, also $\tau = t-\omega$, zum Grunde legen, so hat man die ihm zugehörigen Werthe von x_0 und y_0 durch Interpolation der gegebenen Reihe der Elemente zu suchen, $\log n$ und N aber so anzunehmen, dass $n \sin N$ und $n \cos N$ die Differentialquotienten von x und y zur Zeit τ werden. Den im 17ten § für den Fall II gegebenen Formeln gemäss, hat man die Ausdrücke dieser Differentialquotienten, wenn man nicht über die, immer hinreichenden, dritten Differenzen hinausgeht, für die verschiedenen Zeiten für welche die Elemente berechnet sind,

für die 1te $\Delta_{,}-\frac{1}{2}\Delta_2+\frac{1}{3}\Delta_3$
— 2te $b-\frac{1}{6}\Delta_3$
— 3te &c. . . . $b-\frac{1}{6}d$
— vorletzte . . $b-\frac{1}{6}\Delta_3$
— letzte $\Delta_{,}+\frac{1}{2}\Delta_2+\frac{1}{3}\Delta_3$

anzunehmen und dazwischen für jeden Werth der Zeit τ zu interpoliren. Übrigens bleibt die Rechnung wie vorher.

Die erste Verfahrungsart ergiebt m und M durch die Anwendung der unter den Elementen der Finsterniss unmittelbar vorkommenden x_0, y_0; die zweite macht sie von Werthen dieser Grössen abhängig, welche, für jede Beobachtung, durch Interpolation aus den Elementen gesucht werden müssen. Dagegen hat die zweite den Vortheil vor der ersten voraus, dass das Glied (107*)

$$\frac{m}{n}\,\frac{\sin(M-N+\psi)}{\sin\psi}$$

nur die Berichtigung des angenommenen Werthes von ω ist, und, da es gewöhnlich sehr klein sein wird, durch etwas leichtere Rechnung gefunden werden kann, als die ähnliche Grösse bei der ersten Verfahrungsart. Auch ist die Convergenz der zweiten zur Wahrheit die grösstmögliche; der Fehler der ersten Annäherung besteht nur darin, dass die Bewegung des Mondes während des Zeitunterschiedes zwischen dem vorausgesetzten und dem der Beobachtung entsprechenden Meridiane des Beobachtungsortes, so angenommen wird wie sie am Anfange oder Ende dieses Zeitunterschiedes ist, während sie für die Mitte desselben genommen werden sollte. — Obgleich die zweite Verfahrungsart wirklich diese Vortheile vor der ersten voraus hat, so scheint der dieser eigenthümliche Vortheil doch überwiegend zu sein, wesshalb ich sie, wenigstens immer wenn mehrere Beobachtungen zu berechnen sind, vorziehe.

42.

Die vorgetragene Methode kann, nach dem Gutdünken des Rechners, so angewandt werden, dass x, y, a, d, μ, φ' sich auf den Aequator oder auf die Ecliptik beziehen. Das Resultat der Rechnung (ω) hat keine Beziehung zu dem einen oder anderen dieser grössten Kreise, und sie dienen, im Laufe derselben, nur als Mittel, die Lage der in Betracht kommenden Punkte der Himmelskugel anzugeben. Das erstere

ist indessen immer leichter, wenn man die Örter der Gestirne auf den Aequator bezogen schon vorfindet; auch wenn dieses nicht ist, allein mehrere Beobachtungen zugleich zu berechnen sind. Allein wenn wenige Beobachtungen vorhanden sind, und man die Örter der Gestirne aus den Tafeln selbst, oder aus einer Ephemeride, welche Längen und Breiten enthält, nehmen muss, so wird die Vorarbeit, welche ihre Reduction auf den Aequator fordert, mühsamer als die Aufsuchung der Länge und Breite des Zeniths, in welchem Falle die Ecliptik den Vorzug verdient.

Vorzüglich werden einzelne Beobachtungen von Sonnenfinsternissen, oder Fixsternenbedeckungen durch den Mond, zu einer Zeit gemacht, für welche keine Ephemeriden für die Geradeaufsteigung und Abweichung vorhanden sind, Fälle herbeiführen, in welchen die Rechnung leichter wird, wenn man sie durch Längen und Breiten führt. Dann wird man die, mittelst des vorläufig bekannten Näherungswerthes des Mittagsunterschiedes auf den ersten Meridian reducirte Beobachtungszeit als τ annehmen, für diese Zeit die Länge, Breite und Aequatorealhorizontalparallaxe des Mondes aufsuchen, und daraus, verbunden mit der Länge und Breite der Sonne oder des Sterns, x und y berechnen; ferner wird man die stündlichen Veränderungen der Länge, Breite und Parallaxe aufsuchen und x', y' durch Differentiirung der Ausdrücke von x, y in Beziehung auf diese Grössen erlangen; endlich wird man die Länge und Breite des Zeniths berechnen und diese statt μ und φ' in den Ausdrücken von ξ und η anwenden.

43.

Es ist noch nöthig, den von den Verbesserungen der Rechnungselemente abhängigen Theil der Formeln (107) weiter zu entwickeln.

Zuerst werde ich die von Δx und Δy abhängigen Theile von λ und λ' betrachten. Die Ausdrücke von x und y, nämlich:

$$x = x_0 + n \sin N\,(t-\omega-\tau)$$
$$y = y_0 + n \cos N\,(t-\omega-\tau)$$

ergeben die folgenden:

$$x \sin N + y \cos N = x_0 \sin N + y_0 \cos N + n(t-\omega-\tau)$$
$$-x \cos N + y \sin N = -x_0 \cos N + y_0 \sin N$$

Der zweite ist, wie hieraus hervorgeht, von der Zeit unabhängig. Schreibt man $\varkappa$ dafür, so hat man

$$xx + yy = \varkappa\varkappa + [x_0 \sin N + y_0 \cos N + n(t-\omega-\tau)]^2$$

welcher Ausdruck, zu der Zeit für welche das zweite Glied verschwindet, sich auf sein *Minimum* $= \varkappa\varkappa$ reducirt. Bezeichnet man diese Zeit, auf den ersten Meridian bezogen, durch T, setzt man also

$$\left.\begin{aligned} T &= \tau - \tfrac{1}{n}[x_0 \sin N + y_0 \cos N] \\ \varkappa &= -x_0 \cos N + y_0 \sin N \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (110)$$

so bedeutet T die Zeit wenn $\sqrt{(xx+yy)}$ am kleinsten $= \varkappa$ wird. Hierdurch ausgedrückt, werden

$$\left.\begin{aligned} x \sin N + y \cos N &= n(t-\omega-T) \\ -x \cos N + y \sin N &= \varkappa \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (111)$$

und es geht unmittelbar daraus hervor, dass die von Δx und Δy abhängigen Theile

von λ $-n\Delta T + (t-\omega-T)\Delta n$
von λ' $\Delta\varkappa$
von $\lambda + \lambda' \operatorname{tang}\psi$ $-n\Delta T + \Delta\varkappa \operatorname{tang}\psi + (t-\omega-T)\Delta n$

sind.

Ferner werde ich die von Δee abhängigen Theile von λ und λ' betrachten. Indem man

$$\varrho \cos\varphi' = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{(1-ee\sin\varphi^2)}}$$
$$\varrho \sin\varphi' = \frac{\sin\varphi\,(1-ee)}{\sqrt{(1-ee\sin\varphi^2)}}$$

hat, kann man den in Beziehung auf ee genommenen Differentialquotienten dieser Grössen die Form

$$\frac{d.\varrho\cos\varphi'}{d.ee} = \tfrac{1}{2}\beta\beta.\varrho\cos\varphi'$$
$$\frac{d.\varrho\sin\varphi'}{d.ee} = \tfrac{1}{2}\beta\beta.\varrho\sin\varphi' - \beta$$

geben, worin

$$\beta = \frac{\varrho\sin\varphi'}{1-ee}$$

bedeutet. Hierdurch erhält man, den Ausdrücken (7) gemäss:

$$\frac{d\xi}{d.ee} = \tfrac{1}{2}\beta\beta\xi$$
$$\frac{d\eta}{d.ee} = \tfrac{1}{2}\beta\beta\eta - \beta\cos d$$

und die gesuchten Theile von λ und λ':

$$-\tfrac{1}{2}\beta\beta\left\{\xi\sin N+\eta\cos N\right\}+\beta\cos d\cos N$$

und $$-\tfrac{1}{2}\beta\beta\left\{-\xi\cos N+\eta\sin N\right\}+\beta\cos d\sin N$$

Schreibt man für ξ und η

$$\xi = x_0-(x_0-\xi) = x_0-m\sin M$$
$$\eta = y_0-(y_0-\eta) = y_0-m\cos M$$

so verwandeln sich diese Ausdrücke, den Formeln (110) gemäss, in

$$-\tfrac{1}{2}\beta\beta\left\{n(\tau-T)-m\cos(M-N)\right\}+\beta\cos d\cos N$$

und $$-\tfrac{1}{2}\beta\beta\left\{\varkappa+m\sin(M-N)\right\}+\beta\cos d\sin N$$

oder, da (107)

$$-m\cos(M-N) = L\cos\psi+n(t-\omega-\tau)$$
$$m\sin(M-N) = L\sin\psi$$

ist, in

$$-\tfrac{1}{2}\beta\beta\left\{n(t-\omega-T)+L\cos\psi\right\}+\beta\cos d\cos N$$

und $$-\tfrac{1}{2}\beta\beta\left\{\varkappa+L\sin\psi\right\}+\beta\cos d\sin N$$

Man hat daher den von Δee abhängigen Theil von $\lambda+\lambda'\operatorname{tgt}\psi$

$$=-\left\{\tfrac{1}{2}\beta\beta\left[n(t-\omega-T)+\varkappa\operatorname{tgt}\psi+L\sec\psi\right]-\beta\frac{\cos d\cos(N-\psi)}{\cos\psi}\right\}\Delta ee$$

In dieser Formel ist der Winkel N vom Declinationskreise angezählt; hat man aber nicht Geradeaufsteigungen und Abweichungen, sondern Längen und Breiten, in der Rechnung angewandt, so lernt man dadurch, unter derselben Bezeichnung N, nicht diesen Winkel kennen, sondern den vom Breitenkreise angezählten ähnlichen; auch bedeutet dann d nicht die Abweichung, sondern die Breite des Punkts Z der Himmelskugel. Bezeichnet man, um beide Fälle deutlich zu unterscheiden, die Länge und Breite dieses Punkts durch (a) und (d), und den bei der Anwendung von Längen und Breiten gefundenen Werth des Winkels N durch (N), so wird $N=(N)-q$, wo q den Winkel zwischen dem Declinationskreise und dem Breitenkreise bedeutet, welcher, so wie auch $\cos d$, durch die Formeln

$$\cos d\cos q = \cos(d)\cos\varepsilon-\sin(d)\sin\varepsilon\sin(a)$$
$$\cos d\sin q = \sin\varepsilon\cos(a)$$

aus der bekannten Länge, Breite und Schiefe der Ecliptik (ε) gefunden wird.

Der vollständige Ausdruck des Einflusses der Verbesserungen der Rechnungselemente auf ω, ist, der gegebenen Entwickelung gemäss:

$$-\Delta T + \Delta\varkappa . \frac{h}{n} \operatorname{tang}\psi + \Delta l . \frac{h}{n} \sec\psi + \frac{\Delta n}{n}(t-\omega-T)$$
$$-\Delta ee \frac{h}{n}\left\{\tfrac{1}{2}\beta\beta\left[\frac{n}{h}(t-\omega-T)+\varkappa \operatorname{tang}\psi + L\sec\psi\right]-\beta\frac{\cos d \cos(N-\psi)}{\cos\psi}\right\} \quad (112)$$

wo die Zeiten in Secunden ausgedrückt sind und h die in jeder Stunde der Ephemeride enthaltene Anzahl Secunden der Zeitart, in welcher dieses geschehen und auch die Beobachtung angegeben ist, bedeutet. Wenn diese Zeitart nicht die mittlere, sondern Sternenzeit oder wahre Zeit ist, wird statt t, den Bezeichnungen §. 40 zufolge, μ oder t' geschrieben; statt T aber die dieser mittleren Zeit gleichgeltende Sternenzeit oder wahre Zeit.

44.

Aus einer Beobachtung der Zeit des Anfanges oder Endes einer Finsterniss geht eine Bedingungsgleichung zwischen den verschiedenen Grössen, wodurch diese Zeit bestimmt wird, hervor; welche Bedingungsgleichung durch die Formeln (107) ihre einfachste Gestalt erhält, wenn den drei letzten Gliedern derselben der Ausdruck (112) gegeben wird. Sind mehrere Beobachtungen vorhanden, so können dadurch, allgemein zu reden, zwar eben so viele unbekannte Grössen bestimmt werden, allein zu ihrer *vortheilhaften* Bestimmung ist, ausser dem Vorhandensein der durch die Beobachtungen gegebenen Gleichungen, auch erforderlich, dass sie nicht verschiedene jener Grössen in näherungsweise gleicher Verbindung enthalten. Welche der unbekannten Grössen, in jedem besonderen Falle, aus vorhandenen Beobachtungen bestimmt werden dürfen, geht zwar am vollständigsten aus den für ihn entwickelten Gleichungen hervor; allein ich werde einigen allgemeinen Bemerkungen darüber hier eine Stelle einräumen.

Die unbekannte, einem Fehler des Ortes in der scheinbaren Bahn, welche eins der Gestirne, beziehungsweise auf das andere, an der Himmelskugel beschreibt, entsprechende Grösse ΔT, kann offenbar nur bestimmt werden, wenn ω, womit sie sich vereinigt, wenigstens für einen der Beobachtungsörter bekannt ist. Jede Beobachtung ergiebt einen Ausdruck von $\omega + \Delta T$ durch $\Delta\varkappa$, Δl, Δn, Δee, welcher, falls sie an einem Orte gemacht ist, dessen ω als unbekannt angesehen werden soll, nur zur Bestimmung der vier letzteren Grössen beitragen kann, wenn noch eine zweite Beobachtung vorhanden ist, für welche diese Grössen gleiche Werthe besitzen; also wenn, an demselben Orte, Anfang und Ende der

Finsterniss beobachtet sind. In diesem Falle giebt das Verschwinden des Unterschiedes der zu beiden gehörigen Ausdrücke von $\omega + \Delta T$, die Gleichung wodurch beide Beobachtungen zur Bestimmung der vier Grössen beitragen; jede einzelne Beobachtung an einem Orte, dessen ω bekannt ist, liefert dagegen eine Gleichung zwischen diesen Grössen und ΔT.

Offenbar beruhet die Trennung von $\Delta\varkappa$, Δl, Δn, Δee voneinander, insofern sie durch Beobachtungen *einer* Finsterniss erlangt werden soll, nur auf den, sich an verschiedenen Beobachtungsörtern zeigenden Unterschieden in ihrem Hergange: sie kann nur gelingen wenn die Entfernungen dieser Örter voneinander, vergleichungsweise mit dem Halbmesser der Erde, keine kleine Grössen sind. Zum Beispiele wird das, aus einem Fehler der in der Rechnung vorausgesetzten Horizontalparallaxe entstehende Δn, nur von ΔT getrennt werden können, wenn der Unterschied der auf den ersten Meridian bezogenen Beobachtungszeiten an verschiedenen Örtern, ein beträchtlicher Theil des grössten, auf der Erde vorkommenden ist; Δee wird von den übrigen unbekannten Grössen nur durch die Verschiedenheit der Werthe von β, also der Polhöhen der Beobachtungsörter, getrennt. — Gewisse Fälle von Finsternissen können indessen die Trennung einer der unbekannten Grössen von den übrigen erleichtern; z. B. die Fälle der inneren Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes die Trennung von Δl, so wie auch die Fälle der Durchgänge der Venus durch die Sonne die Trennung von Δn. Auch können die Beobachtungen *mehrer*, fast gleichzeitig vorfallender Finsternisse, in der gegenwärtigen Beziehung, von beträchtlichem Nutzen sein, z. B. die Beobachtungen der äusseren *und* inneren Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes, und der Durchgänge des Mondes durch Gruppen von Sternen, deren Örter relativ bekannt sind.

Im Allgemeinen wird das Zusammentreffen derjenigen Umstände der Beobachtungen, welches zur erfolgreichen Bestimmung aller unbekannten Grössen erforderlich ist, so schwer zu erlangen sein, dass diese schwerlich je gelingen wird. Man hat wiederholt die Beobachtungen der Fixsternbedeckungen durch den Mond, als ein Mittel vorgeschlagen, die Abplattung der Erde zu bestimmen; jedoch sind diese Vorschläge nie von einer *genügenden* Entwickelung ausgegangen, welche, wenn man sie vorgenommen hätte, wohl gezeigt haben würde, dass die Gleichung, welche vorhandene Beobachtungen, nach der Elimination der übrigen

unbekannten Grössen, zur Bestimmung von Δee ergeben, von den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern viel zu abhängig wird, um ihrem Resultate Zutrauen erwerben zu können. Zwar werden die Zeiten der Ein- oder Austritte der Fixsterne am dunkelen Mondrande gewöhnlich sehr genau beobachtet, allein weit seltener gewähren ähnliche Beobachtungen am hellen Rande befriedigende Sicherheit; auch könnnen über den Rand hervorragende Berge des Mondes wesentlich in Betracht kommenden Einfluss auf diese Zeiten erlangen; endlich würde auch die Anwesenheit der Sonne über dem Horizonte Beobachtungsörter einer Sternbedeckung ausschliessen, welche zur vortheilhaften Trennung aller unbekannten Grössen voneinander erforderlich sein würden. — Im Falle der äusseren Berührungen der Ränder bei Sonnenfinsternissen, ist die Sicherheit der Beobachtungen weit geringer, vorzüglich für den Anfang derselben, so dass jede Folgerung täuschend wird, wenn sie von der Voraussetzung der Richtigkeit seiner Beobachtungen innerhalb 3 bis 4″ ausgehen muss.

In demselben Maasse, in welchem die Trennung der verschiedenen unbekannten Grössen schwierig wird, wird sie aber auch weniger nöthig. Wenn z. B. die Gleichungen, welche die Beobachtungen nach der Elimination einer oder zweier derselben übrig lassen, fast unbestimmt werden, können die übrigen, ohne erheblichen Fehler, als mit jenen sich vereinigend angesehen werden, so dass gewisse Resultate der Beobachtungen, z. B. die Mittagsunterschiede der Beobachtungsörter, auch ohne vollständige Trennung der unbekannten Grössen, näherungsweise von ihnen befreiet werden können.

45.

Wenn die Beobachtungen, in einem vorgekommenen Falle, nicht zu der Bestimmung aller unbestimmten Grössen des Ausdruckes (112) und ihrer vollständigen Elimination aus den Resultaten hinreichen, so muss die Wahl der vorzugsweise zu eliminirenden, von der Betrachtung der Grössen ihrer Unbestimmtheit und ihres Einflusses ausgehen. Verschiedene Arten von Finsternissen können verschiedene Wahlen fordern; das was ich jetzt darüber sagen werde, bezieht sich auf Finsternisse welche der *Mond* verursacht.

Aus seinen Tafeln oder Ephemeriden werden seine geocentrischen Örter, seine Aequatorealparallaxe und das Verhältniss seines Halbmessers zu dieser entlehnt; aus unbestimmten Änderungen dieser Grössen, so wie auch der ähnlichen, dem verfinsterten Gestirne angehörigen, gehen die unbestimmten Grössen ΔT, $\Delta \varkappa$, Δl, Δn hervor. Die Fehler der Örter beider Gestirne müssen, so lange ihre Theorien noch nicht vollkommen genau geworden sein werden, als ganz unbestimmt betrachtet werden; der Fehler der Parallaxe des Mondes ist entweder als eine in jedem Falle willkürliche, oder als eine beständige unbekannte Grösse anzusehen, das erstere wenn die Ungleichheiten ihres theoretischen Ausdruckes als zweifelhaft, das letztere wenn sie als sicher angenommen werden; die Fehler der Verhältnisse der Halbmesser zu den Parallaxen sind jedenfalls beständige unbekannte Grössen. Die als ganz unbestimmt anzusehenden Fehler müssen, insoweit die Beobachtungen dazu hinreichen, aus den Resultaten eliminirt werden; die als beständige Grössen anzusehenden dürfen nicht in jedem besonderen Falle bestimmt und aus den Resultaten eliminirt werden, sondern ihre Bestimmung muss dem gemeinschaftlichen Zeugnisse *aller* dazu brauchbaren Beobachtungen überlassen und ihre Elimination aus den Resultaten nur durch die Angabe ihrer Einflüsse darauf vorbereitet werden. Soll aus den Beobachtungen jedes besonderen Falles aller Nutzen gezogen werden, welchen sie für die Bestimmung der beständigen Grössen gewähren können, so müssen aus ihnen die Gleichungen entwickelt werden, durch welche sie zu dieser Bestimmung beitragen.

Der gegenwärtige Zustand der Kenntniss der Bewegungen des Mondes rechtfertigt die Annahme, dass seine Parallaxe, für jede Finsterniss, mit weit grösserer Sicherheit bekannt ist als sein geocentrischer Ort; auch lässt die Theorie ihre Ungleichheiten so wenig unsicher, dass die vorsichtige Entwickelung derselben ihren möglichen Fehler, wenigstens sehr nahe, beständig machen muss. Hieraus geht hervor, dass die Berechnung der Beobachtungen einer Finsterniss, vorzugsweise auf die Elimination der *Örter* der Gestirne aus den Resultaten ausgehen muss. Ich werde untersuchen, in welchen Verbindungen die unbestimmten Grössen des Ausdruckes (112) mit unbestimmten Änderungen der Örter, Halbmesser und Parallaxen sind.

Wenn man für

$$x = \frac{\cos\delta \sin(\alpha - a)}{\sin\pi}; \quad y = \frac{\cos d \sin\delta - \sin d \cos\delta \cos(\alpha - a)}{\sin\pi}$$

um abzukürzen

$$x = \frac{X}{\sin\pi}; \quad y = \frac{Y}{\sin\pi}$$

schreibt, so hat man die aus Änderungen der Elemente hervorgehenden Änderungen von x und y:

$$\Delta x = \frac{\Delta X}{\sin\pi} - x\frac{\Delta\pi}{\tang\pi}; \quad \Delta y = \frac{\Delta Y}{\sin\pi} - y\frac{\Delta\pi}{\tang\pi}$$

und daher den Formeln (111) zufolge:

$$\frac{\Delta X \sin N + \Delta Y \cos N}{\sin\pi} - n(t - \omega - T)\frac{\Delta\pi}{\operatorname{tgt}\pi} = -n\Delta T + \Delta n(t - \omega - T)$$

$$\frac{-\Delta X \cos N + \Delta Y \sin N}{\sin\pi} - \varkappa\frac{\Delta\pi}{\operatorname{tgt}\pi} = \Delta\varkappa$$

Wenn man nun

$$\frac{\Delta n}{n} = -\frac{\Delta\pi}{\operatorname{tgt}\pi}$$

annimmt, also auch

$$\frac{\Delta X . \sin N + \Delta Y . \cos N}{\sin\pi} = -n\Delta T$$

$$\frac{-\Delta X . \cos N + \Delta Y . \sin N}{\sin\pi} = \Delta\varkappa + \varkappa\frac{\Delta\pi}{\operatorname{tgt}\pi}$$

so folgt hieraus, dass die Voraussetzung während der Dauer der Finsterniss unveränderlicher Werthe von Δn, ΔT, $\Delta\varkappa$, fordert, dass auch

$$\frac{\Delta\pi}{\operatorname{tgt}\pi}, \quad \frac{\Delta X}{\sin\pi}, \quad \frac{\Delta Y}{\sin\pi}$$

während derselben Zeit als unveränderlich angenommen werden. Die Ausdrücke der beiden letzten dieser Grössen sind:

$$\frac{\cos\delta\cos(\alpha - a)\,\Delta(\alpha - a)}{\sin\pi} - \frac{\sin\delta\sin(\alpha - a)\,\Delta\delta}{\sin\pi}$$

und $$\frac{\cos\delta\sin(\alpha - a)\,\Delta(\alpha - a)}{\sin\pi}\sin d + \frac{\cos d\cos\delta + \sin d\sin\delta\cos(\alpha - a)}{\sin\pi}\Delta\delta - \frac{\sin d\sin\delta + \cos d\cos\delta\cos(\alpha - a)}{\sin\pi}\Delta d$$

und für die Zeit der Zusammenkunft beider Gestirne, oder für die $\alpha - a = 0$ entsprechende, verwandeln sie sich in

$$\frac{\cos\delta\,\Delta(\alpha - a)}{\sin\pi} \quad \text{und} \quad \frac{\cos(\delta - d)\,\Delta(\delta - d)}{\sin\pi}$$

Nimmt man also δ, π, $\Delta(\alpha - a)$, $\Delta(\delta - d)$ für diese Zeit geltend an und setzt man 1 für $\cos(\delta - d)$, π für $\sin\pi$ und $\operatorname{tgt}\pi$, so hat man:

$$-\Delta T = \frac{\cos\delta\,.\,\Delta(\alpha-a)}{n.\,\pi}\sin N + \frac{\Delta(\delta-d)}{n\pi}\cos N$$
$$\Delta\varkappa = -\frac{\cos\delta.\Delta(\alpha-a)}{\pi}\cos N + \frac{\Delta(\delta-d)}{\pi}\sin N - \varkappa\frac{\Delta\pi}{\pi}$$
$$\frac{\Delta n}{n} = -\frac{\Delta\pi}{\pi}.$$

Der Ausdruck von l ist (12)
$$s\,\mathrm{tgt} f = z\,\mathrm{tgt} f \pm k\sec f$$
oder
$$l\cos f = z\sin f \pm k = \frac{z}{r'g}(\sin H \pm k\sin \Pi) \pm k$$
und g ist nicht merklich von
$$1-m = 1-\frac{\sin\Pi}{r'\sin\pi}$$
verschieden, so wie z nicht merklich von $\frac{1}{\sin\pi}$. Hierdurch wird
$$l\cos f = \frac{\sin H \pm r'k\sin\pi}{r'\sin\pi - \sin\Pi}$$
und mit hinreichender Näherung
$$\Delta l = \pm\Delta k + \frac{\Delta H}{r'\pi} - \frac{H}{r'\pi}.\frac{\Delta\pi}{\pi}$$
wo H den mittleren Halbmesser und r' die Entfernung des entfernteren Gestirns, durch die mittlere der Erde von der Sonne gemessen, bedeutet. Für Fixsternbedeckungen ist $\Delta l = \Delta k$.

Substituirt man diese Ausdrücke in dem Ausdrucke (112), so dass man die von den Veränderungen der Halbmesser, von $\Delta\pi$ und von Δee abhängigen Glieder voneinander trennt, so wird er
$$\begin{aligned}&\nu\,[\sin N.\cos\delta\,\Delta(\alpha-a) + \cos N\,\Delta(\delta-d)]\\ &+\nu\,[-\cos N.\cos\delta\,\Delta(\alpha-a) + \sin N\,\Delta(\delta-d)]\,\mathrm{tgt}\,\psi\\ &+\nu\left(\frac{\Delta H}{r'} \pm \pi\Delta k\right)\sec\psi\\ &-\nu\left[\frac{n}{h}(t-\omega-T) + \varkappa\,\mathrm{tgt}\,\psi + \frac{H}{r'\pi}\sec\psi\right]\Delta\pi\\ &-\nu\left[\tfrac{1}{2}\beta\beta\left[\frac{n}{h}(t-\omega-T) + \varkappa\,\mathrm{tgt}\psi + L\sec\psi\right] - \beta\frac{\cos d\cos(N-\psi)}{\cos\psi}\right]\pi\Delta ee \quad (113)\end{aligned}$$
wo ν, um abzukürzen, für $\frac{h}{n\pi}$ geschrieben ist, also die Zahl Zeitsecunden bedeutet, in welcher die Gestirne sich relativ um eine Secunde bewegen.

46.

Ausser der ersten, sich mit dem Mittagsunterschiede vereinigenden unbekannten Grösse der Formeln (112) und (113), ist zunächst die in tang ψ multiplicirte zu bestimmen. Hierdurch wird gewöhnlich die Kraft

der vorhandenen Beobachtungen schon erschöpft werden; oft werden diese selbst dazu nicht hinreichen und einer Unterstützung durch gute Meridianbeobachtungen bedürfen. Indessen werden auch Fälle vorkommen, welche die vortheilhafte Bestimmung der in sec ψ multiplicirten unbekannten Grösse erlauben; z. B. die inneren Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes, vorzüglich wenn sie in der Nähe beider Grenzen des wenig breiten Raumes auf der Erde, wo diese Erscheinung sichtbar ist, beobachtet werden. In Europa allein gemachte Beobachtungen von Fixsternenbedeckungen versprechen, im Allgemeinen, einen geringen Erfolg der Bestimmung von Δk.

So selten sich auch Beobachtungen einer Finsterniss vorfinden, welche hierüber hinauszugehen erlauben, so kommen doch auch Fälle vor, in welchen sie das schätzbarste Mittel zur Bestimmung der Parallaxe des Mondes liefern können. Ich benutze diese Gelegenheit, hierauf aufmerksam zu machen; in der Hoffnung, durch das Hervorheben der Wichtigkeit solcher Fälle, Anstrengungen der Beobachter dafür zu erregen. Die Formel (112) zeigt unmittelbar, dass die Trennung der Parallaxe von anderen unbekannten Grössen, durch die Verschiedenheit der Beobachtungszeiten an verschiedenen Orten erlangt wird; desto vortheilhafter also, je grösser diese Verschiedenheit ist. Die inneren Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes können sehr genau beobachtet werden; ihre Beobachtung in zwei Gegenden der Erde, deren eine sie in der Nähe des Aufganges, die andere in der Nähe des Unterganges der Sonne wahrnimmt, verspricht einen grösseren Erfolg der Bestimmung der Parallaxe des Mondes als andere Mittel der practischen Astronomie. Erforderlich ist, dass die Mittagsunterschiede der Beobachtungsörter, unabhängig von Finsternissen, gut bestimmt seien und dass allenthalben *gleiche* Momente der Erscheinung beobachtet werden; im Falle einer ringförmigen Finsterniss die Momente der vollständigen Erscheinung und ersten Unterbrechung des Ringes; im Falle einer gänzlichen die des vollständigen Verschwindens und ersten Wiedererscheinens der Sonne. Wünschenswerth ist, dass in jeder der beiden, weit voneinander entfernten Gegenden, *mehrere* Beobachtungsörter besetzt werden. Da aber nicht zu erwarten ist, dass Erscheinungen, welche die Sicherheit der Kenntniss der Mondparallaxe vergrössern können, so grosse Theilnahme erregen werden, als die der Sonnenparallaxe wegen beobachteten

in den Jahren 1761 und 1769 erregten, so kann sich die Hoffnung sie benutzt zu sehen, nur auf den *vorhandenen* Zustand der Thätigkeit für die beobachtende Astronomie gründen. In dem jetzt vorhandenen Zustande würde eine Sonnenfinsterniss, welche nicht allein in *Europa*, sondern auch in den *vereinigten Staaten von Nordamerika* central erscheint, auch ohne besondere Gründe für ihre Beobachtung, wahrscheinlich das zu einer Untersuchung über die Parallaxe des Mondes Erforderliche liefern. Dass die *selten* vorkommenden Fälle dieser Art, als *wichtige* astronomische Ereignisse behandelt werden mögen, ist der Wunsch, aus welchem diese Bemerkung über ihr Gewicht für die Bestimmung der Mondparallaxe hervorgegangen ist. — Man bemerkt übrigens leicht, dass der Mittagsunterschied zweier, weit voneinander entfernten Punkte der Erde, durch einen gleichen Fehler der Parallaxe des Mondes, in verschiedenen Finsternissen nahe gleiche Änderungen erfährt; dass also sein als bekannt vorausgesetzter Werth nicht aus Beobachtungen von Finsternissen abgeleitet sein darf, wenn er die Grundlage einer Untersuchung der Parallaxe werden soll. Das von *Gauss* in die astronomische Praxis eingeführte Mittel der Mondculminationen ist daher das anzuwendende; wenigstens *ein* Ort in Amerika muss dadurch mit europäischen Sternwarten verbunden und dann als Grundlage der Bestimmung der Mittagsunterschiede anderer amerikanischen Örter angenommen werden.

Vorzügliche Aufmerksamkeit verdienen die Durchgänge des Mondes durch die *Plejaden*. Wenn die relativen Örter der Sterne dieser Gruppe als bekannt angenommen werden dürfen, so liefert jeder Durchgang, zur Bestimmung der unbekannten Grössen der Formel (113), so viele Gleichungen, als er beobachtete Momente geliefert hat, denn die erste, sich mit dem Mittagsunterschiede vereinigende derselben, hat, so wie auch die zweite, für die verschiedenen Sterne so wenig verschiedene Werthe, dass man sie für alle als gleich annehmen kann; die dritte ist für alle Fixsternenbedeckungen $= \pi \Delta k$; die vierte bezieht sich allein auf den Mond, die fünfte allein auf die Erde. Der gewöhnlichste Fall, in welchem entweder nur die Beobachtungen der Eintritte, oder nur die der Austritte, nicht aber beide, genau gemacht werden können, liefert, durch die einen oder die andern allein, eine Anzahl auf *sichere* Beobachtungen gegründeter Gleichungen, welche, vorzüglich wenn der Mond nördlich von einigen und südlich von anderen Sternen durchgeht, die

Bestimmung der Werthe der zwei oder drei ersten unbekannten Grössen, und ihre Elimination aus den Resultaten, weit vollständiger macht, als im Falle der Bedeckung eines einzelnen Fixsterns zu erwarten ist. Hierdurch wächst der Werth, welchen ein an zwei Orten beobachteter Durchgang des Mondes durch die Plejaden, für die Bestimmung des Mittagsunterschiedes, vergleichungsweise mit dem Werthe der Beobachtung einer einzelnen Sternbedeckung, erhält, stärker als die Zahl der bedeckten Sterne; so dass, wenn jene Beobachtungen (bei vorausgesetzter genauer Zeitbestimmung) einigemal gut gelungen sind, das Gewicht des daraus hervorgegangen Mittagsunterschiedes, durch andere, einzelne Sternbedeckungen schwer wird vermehrt werden können. Diesen grossen Vortheil haben die Bedeckungen der Plejaden aber nur voraus, wenn die relativen Örter ihrer Sterne mit der zu seiner Erlangung erforderlichen Genauigkeit bekannt sind. Dieses war eine der Veranlassungen der im ersten Bande bekanntgemachten Arbeit über die Plejaden; ich hoffe, dass das auf Heliometerbeobachtungen gegründete Verzeichniss von 53 ihrer Sterne (I. S. 237), auch in der gegenwärtigen Beziehung genügen wird.

Dieselbe Ursache, welche die Durchgänge des Mondes durch die Plejaden besonders werthvoll für die Bestimmung der Mittagsunterschiede macht, hat auch die Folge, dass sie sehr sichere Bestimmungen seines relativen Orts ergeben; sicherere als man durch ein anderes Mittel zu erhalten vermag; daher zur Prüfung der Genauigkeit einer Mondstheorie vorzüglich geeignete. Der Werth solcher Bestimmungen wird noch dadurch vermehrt, dass sie die frühsten von hinreichender Genauigkeit sind, welche man durch Beobachtungen erlangen kann. Die Sammlung und Reduction derjenigen Beobachtungen dieser Art, für deren richtige Zeitbestimmung man hinreichende Gewähr erlangen kann, würde einen wesentlichen Beitrag zur Untersuchung der Bewegungen des Mondes liefern: einen Beitrag, dessen Werth die Mühe belohnen würde, welche seine Erwerbung kosten wird.

47.

Die im ersten Abschnitte gegebene und später verfolgte Grundgleichung der Analyse der Finsternisse, ist der Ausdruck der Bedingung, dass ein die Ränderberührung zweier Gestirne wahrnehmender Punkt, sich in der Oberfläche eines der beiden geraden Kegel befinde, welche

beide Gestirne einhüllen; Alles was ich, in den folgenden Abschnitten, aus dieser Gleichung abgeleitet habe, setzt voraus, dass dieser Punkt in der angenommenen, sphäroidischen Oberfläche der Erde, liege. Die Strahlenbrechung in der Atmosphäre verursacht aber, dass gerade, in der Oberfläche des Kegels liegende Linien gekrümmt werden, diese Oberfläche also in der Wirklichkeit aufhört, die eines Kegels zu sein; ferner verursachen die vorhandenen Unregelmässigkeiten der physischen Oberfläche der Erde, dass die Beobachtungsörter sich, im Allgemeinen, nicht in ihrer angenommenen befinden. Es wird daher nöthig, diese Unterschiede der Wirklichkeit von der verfolgten Annahme noch zu berücksichtigen.

Dass die Strahlenbrechung *keinen* Einfluss auf die Erscheinungen der Finsternisse äussere, ist mehreremale ausgesprochen und öfter stillschweigend angenommen worden. *Hansen* hat aber den Fehler dieser Annahme bemerkt, also die Nothwendigkeit einer Verbesserung der bisherigen Theorien dieser Erscheinungen gezeigt*). — Die Asymptote des zum Auge gelangenden Strahls vom Berührungspunkte der Ränder, schneidet die Lothlinie des Auges an einem Punkte, wo die Ränderberührung, wenn keine Strahlenbrechung vorhanden wäre, genau so erscheinen würde, wie sie wirklich erscheint. Man berücksichtigt also den Einfluss der Strahlenbrechung, indem man den Beobachtungsort an diesen Punkt, dessen Erhöhung ich durch h' bezeichnen werde, verlegt; liegt er selbst nicht in der angenommenen Oberfläche der Erde, sondern in der Höhe h über ihr, so ist er also auf seiner Lothlinie, $h+h'$ über dieser Oberfläche anzunehmen. Diese Erhöhung des Beobachtungsorts verändert die bisher angewandten Werthe von $\varrho \cos\varphi'$ und $\varrho \sin\varphi'$ in

$$\varrho \cos\varphi' + (h+h') \cos\varphi \quad \text{und} \quad \varrho \sin\varphi' + (h+h') \sin\varphi$$

oder, nach den Formeln (14), in:

$$\varrho \cos\varphi' \left[1 + (h+h') \sqrt{(1-ee \sin\varphi^2)}\right] \text{ und } \varrho \sin\varphi' \left[1 + (h+h') \frac{\sqrt{(1-ee \sin\varphi^2)}}{1-ee}\right]$$

Indessen sind h und h' immer sehr kleine, selten auf ein Dreitausentel steigende Grössen, wesshalb man ihre Producte in ee vernachlässigen, also *beide* Grössen in dem *gleichen* Verhältnisse $1+h+h'$, welches auch nicht merklich von $(1+h)(1+h')$ verschieden ist, vergrössern kann. Die

*) Astronom. Nachrichten Nro. 347.

Berücksichtigung beider Ursachen reducirt sich also auf die Hinzufügung der Logarithmen dieser beiden Factoren zu dem in der Rechnung bisher angewandten Logarithmen von ϱ.

Ich werde die Ausdrücke beider Logarithmen aufsuchen. Wenn man die Erhöhung des Beobachtungsorts über der Oberfläche des dafür angenommenen elliptischen Rotationssphäroids in Toisen ausgedrückt, und den Halbmesser des Erdaequators $= 3272077^T,14$ voraussetzt, so ist, hinreichend nahe

$$\log(1+h) = h.0{,}00000013273 \;(\log = 3{,}12296).$$

Wenn die Atmosphäre aus concentrischen Schichten bestehend angenommen, die Dichte einer von ihnen durch ϱ, ihre Strahlenbrechungskraft durch $\mu\varrho$, ihre Entfernung vom Mittelpunkte durch r, der Winkel eines sie durchschneidenden Strahls mit ihrer Normale durch z bezeichnet wird, so ist die bekannte characteristische Eigenschaft der Bahn des Strahls die, dass das Product $r \sin z \sqrt{(1+\mu\varrho)}$ einen beständigen Werth habe. Bezeichnet man die Werthe von r, z, ϱ für den Punkt des Strahls, wo das Auge sich befindet, durch a, θ, (ϱ), so ist also

$$r \sin z \sqrt{[1+\mu\varrho]} = a \sin\theta \sqrt{[1+\mu(\varrho)]}.$$

Wenn man an den durch r und z bestimmten Punkt des Strahls eine Tangente legt, und sie die Lothlinie, an dem vom Auge x entfernten Punkte, im Winkel ζ durchschneidet, so ist

$$r \sin z = (a+x)\sin\zeta$$

und daher

$$(a+x)\sin\zeta \sqrt{[1+\mu\varrho]} = a\sin\theta \sqrt{[1+\mu(\varrho)]}$$

Bezieht man das erste Glied dieser Gleichung auf einen unendlich weit entfernten Punkt des Strahls, so verwandelt die Tangente sich in die Asymptote und man hat $x = h'$, $\varrho = 0$, und ζ wird die *wahre* Zenithdistanz, welche ich, analog mit der scheinbaren θ, durch θ' bezeichnen werde. Die Gleichung verwandelt sich dann in

$$1 + \frac{h'}{a} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta'} \sqrt{[1+\mu(\varrho)]}$$

wo a den Krümmungshalbmesser der Oberfläche der Erde in dem Azimuthe des Strahls bedeutet; oder, wenn dieses durch A bezeichnet wird,

$$a = \frac{1-ee}{(1-ee+ee\cos\varphi^2\cos A^2)\sqrt{(1-ee\sin\varphi^2)}}$$

Indessen kann das oben schon vernachlässigte Product $h'ee$ auch hier

vernachlässigt werden; mit desto grösserem Rechte, da man die ganze Strahlenbrechung vom Azimuthe unabhängig anzunehmen pflegt und hier nur eine kleine Wirkung derselben betrachtet wird. Man hat also

$$\log(1+h') = \log\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} + \tfrac{1}{2}\log[1+\mu(\varrho)].$$

Dieser Logarithme kann in eine Tafel gebracht werden, deren Argument die wahre Zenithdistanz θ' des durch a, d bestimmten Punkts der Himmelskugel ist. Die Tafel, welche ich hier mittheile, ist aus der zweiten der drei, im Bande I. S. 198 vereinigten abgeleitet worden, über $\theta' = 85°$ hinaus aber aus derselben Quelle, aus welcher ich diese abgeleitet habe; der Werth von $\mu(\varrho)$ ist $= 0{,}0005600$. Sie gilt unmittelbar für den Zustand der Atmosphäre, für welchen die vom Barometerstande und Thermometerstande abhängigen Factoren β und $\gamma = 1$ sind, wird aber sehr nahe diesen Factoren proportional geändert.

θ'	$\log(1+h')$	θ'	$\log(1+h')$
0°	0,0000000	82° 0′	0,0000069
10	0,0000000	83 0	0,0000086
20	0,0000000	84 0	0,0000111
30	0,0000001	85 0	0,0000147
40	0,0000001	30	0,0000169
50	0,0000002	86 0	0,0000198
60	0,0000005	30	0,0000234
62	0,0000006	87 0	0,0000280
64	0,0000007	30	0,0000337
66	0,0000008	88 0	0,0000412
68	0,0000009	30	0,0000511
70	0,0000012	50	0,0000594
72	0,0000015	89 0	0,0000643
74	0,0000019	10	0,0000695
76	0,0000025	20	0,0000753
78	0,0000033	30	0,0000817
80	0,0000046	40	0,0000888
81	0,0000056	50	0,0000967
82	0,0000069	90 0	0,0001054

Hieraus geht hervor, dass der Einfluss der Strahlenbrechung meistens sehr klein ist, dass er aber doch nicht immer vernachlässigt werden darf. Wollte man ihn auf die Grösse der Horizontalparallaxe des Mondes übertragen, so würde er, bis zu $\theta' = 70°$ unter $0{,}''01$ bleiben, und erst für $\theta' = 84°$ auf etwa $0{,}''1$, und für $\theta' = 90°$ auf etwa eine Secunde steigen können.

XI.

Ein Hülfsmittel zur Erleichterung der Beobachtungen der Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen.

Sowohl von den Sonnenfinsternissen, als von den Sternbedeckungen wird gewöhnlich nur entweder der Anfang oder das Ende, selten werden beide Phasen mit gehöriger Sicherheit beobachtet: der Anfang einer Sonnenfinsterniss und der erste Eingriff eines durch die Sonne gehenden Planeten werden immer zu spät gesehen, wenn der Beobachter den Punkt des Randes, wohin er seine Aufmerksamkeit zu richten hat, nicht genau kennt; der Austritt eines Sterns aus der Mondscheibe ist in demselben Falle, zumal wenn er sich am erleuchteten Rande ereignet. Indem diese Unsicherheit eines Theils der Beobachtung die Folge hat, dass die Werthe der unbekannten Grössen, welche sich mit dem aus ihr zu ziehenden Resultate vereinigen, entweder unbestimmt bleiben, oder eine unsichere Bestimmung erhalten, so geht dadurch ein Theil des Gewichts verloren, welches dem Resultate gebühren würde, wenn es allein auf den sicherer beobachteten Theil der Erscheinung gegründet werden könnte. Es ist daher *wesentlich*, eine Einrichtung zu treffen, durch deren Hülfe der Punkt des Randes erkannt werden kann, wo die zu beobachtende Erscheinung sich ereignen wird.

Da der Positionswinkel dieses Punkts am Rande der Sonne oder des Mondes, nach den im dritten Abschnitte der Abhandl. X. gegebenen Vorschriften, oder durch die ihnen gemäss berechneten Zahlen, welche das Astr. Jahrb. von *Encke* für jede Finsterniss und Sternbedeckung

angiebt, leicht gefunden werden kann, so bleibt nur zu wünschen, dass man ein leicht anwendbares Mittel besitze, den, einem *bekannten* Positionswinkel entsprechenden Punkt zu erkennen. — Offenbar ist er einer der beiden Punkte, wo der Rand durch eine Linie berührt werden kann, deren Richtung ein 90° verschiedener Positionswinkel zugehört: man erkennt ihn also, indem man einem Faden im Fernrohre diese Richtung giebt und dann seinen Berührungspunkt mit dem Rande aufsucht.

Um dem Faden in einem Fernrohre jede bestimmte Richtung geben zu können, habe ich eins der Oculare so abändern lassen, dass es um seine Axe gedrehet, und die Grösse jeder Drehung, auf einer auf seine Röhre geschnittenen Theilung, abgelesen werden kann. — Nachdem man die Angabe des Zeigers der Theilung, welche dem Zusammenfallen des Fadens mit der Richtung der täglichen Bewegung zugehört, ausgemittelt hat, addirt man zu ihr den gegebenen Positionswinkel und drehet das Ocular bis der Zeiger dieser Summe entspricht, wodurch der Faden die erforderliche Richtung erhält.

Wenn das Fernrohr parallactisch aufgestellt ist, kann man die Richtung der täglichen Bewegung, auf der Theilung der Ocularröhre einfürallemal bestimmen; wenn es aber, wie gewöhnlich, eine andere Aufstellung hat, muss diese Bestimmung jedesmal wenn eine Finsterniss oder Sternbedeckung beobachtet werden soll, entweder durch das verfinsterte Gestirn selbst, oder durch ein anderes ihm sehr nahes, gemacht werden. Im Falle einer Sonnenfinsterniss bestimmt man die Richtung der täglichen Bewegung durch die Aufsuchung der Lage des Fadens, welcher der Sonnenrand, kurz vor dem erwarteten Anfange folgt. Im Falle einer Sternbedeckung kann man einen sehr nahe bei dem Monde stehenden Fixstern dazu benutzen, den man, mit einem Fernrohre, welches die zur Beobachtung der Austritte am hellen Rande erforderliche Stärke besitzt, nie vergebens suchen wird. Will man einen Fehler des zu findenden Punkts, der bis auf eine halbe Minute steigen kann, nicht für erheblich ansehen, so kann man die scheinbare Bewegung des Mondes im Fernrohre als das Parallel annehmen, also die Richtung der täglichen Bewegung auch durch seinen Rand, oder einen seiner Flecken bestimmen. — Indem der Punkt des Mondrandes, wo ein Stern wiedererscheinen wird, durch die in seiner Nähe befindlichen Flecken kenntlich wird, so kann

er auch schon vor dem Eintritte aufgesucht werden; die Veränderungen der Positionswinkel der Flecken, sind während einer Stunde so klein, dass sie hier nicht in Betracht kommen.

Die Einrichtung eines Oculars zum Drehen um seine Axe und das Auftragen einer Theilung auf seine Röhre, sind so leicht auszuführen, und der Nutzen, welcher dadurch für die Beobachtungen der Finsternisse und Sternbedeckungen erlangt wird, ist so beträchtlich, dass jedem Besitzer eines astronomischen Fernrohrs diese Einrichtung empfohlen werden kann. Auf der Königsberger Sternwarte wird sie häufig, mit vollständigem, fast ohne Mühe zu erlangenden Erfolge, angewandt.

XII.

Beobachtung des Durchganges des Mercur durch die Sonne, am 4—5. May 1832.

Die Beobachtung dieses Durchganges hat auf der Königsberger Sternwarte mit einer Vollständigkeit gemacht werden können, welche ihr grösseres Interesse gegeben hat, als ähnliche Beobachtungen sonst zu haben pflegen: die Möglichkeit, durch das Heliometer zuverlässige Messungen zu erhalten, hat diese Vollständigkeit hervorgebracht; der Zustand des Himmels hat wesentlich dazu beigetragen, denn die Bilder im Fernrohre erschienen so scharf und deutlich begrenzt, dass die Messungen mit grosser Sicherheit gemacht werden konnten. Während der ganzen Dauer der Erscheinung tobte zwar ein heftiger Sturm, welcher das Instrument oft erschütterte und auch bis zum Mittage häufige Wolken vor der Sonne vorübertrieb; allein beides hat nur zur Folge gehabt, dass die Beobachtungen mehr Zeit kosteten; nachtheiligen Einfluss auf die Güte der Messungen hat es nicht gehabt, denn da Erschütterungen des Fernrohrs eine gemeinschaftliche Bewegung der von beiden Objectivhälften gemachten Bilder erzeugen, so kann man die Berührung derselben, im nicht ganz ruhigen Fernrohre, selbst dann noch sicher beurtheilen, wenn ein nicht auf das Princip der doppelten Bilder gegründetes Mikrometer seine Dienste gänzlich versagen würde. Bei dem heftigen Sturme würde man mit einem Fadenmikrometer nicht haben messen können.

Durch meine Beobachtung habe ich drei verschiedene Zwecke verfolgt: ich wollte nicht nur die Zeiten der Berührungen der Ränder kennen lernen, sondern auch die Erscheinung benutzen, um dadurch über die *Irradiation* der Sonne ein Urtheil zu erhalten und um die Grösse und die Figur des Mercur zu bestimmen. Wie alles dieses gelungen ist, wird das Folgende zeigen.

1.

Bei dem Eintritte bemerkte ich die äussere Berührung der Ränder beträchtlich zu spät*), die innere aber, meiner Meinung nach ganz zuverlässig:

$$1^{u}\ 17'\ 36{,}''68 \text{ St. Z.} = 22^{u}\ 24'\ 38{,}''77 \text{ M. Z.}$$

Bei dem Austritte erfolgte die innere Berührung

$$8^{u}\ 1'\ 40{,}''14 \text{ St. Z.} = 5^{u}\ 7'\ 38{,}''03 \text{ M. Z.}$$

die äussere

$$8^{u}\ 5'\ 3{,}''19 \text{ St. Z.} = 5^{u}\ 11'\ 0{,}''53 \text{ M. Z.}$$

Beide innere Berührungen der Ränder zeigten sich, ohne dass zwischen dem Rande des Planeten und dem Sonnenrande ein Lichtfaden plötzlich entstanden oder verschwunden wäre; vielmehr lief der den Planeten umgebende Theil der Sonnenscheibe, unmittelbar vor dem gänzlichen Eintritte, in die allerfeinsten Spitzen aus, welche sich, zu der für die innere Berührung angegebenen Zeit, vereinigten, so dass dadurch eine helle Linie zwischen beiden Rändern entstand, deren Anfangs kaum sichtbare Breite sich durch die Bewegung des Planeten stetig vergrösserte. Bei dem Austritte war ich auf diese Umstände vielleicht noch aufmerksamer als bei dem Eintritte, wenigstens wurde die Aufmerksamkeit nicht mehr durch vorüberziehende Wolken unterbrochen; allein die von dem Eintritte gegebene Beschreibung passt, in umgekehrter Ordnung, genau auf den Austritt, so dass über die Art wie das Fernrohr die Erscheinung zeigte nicht der geringste Zweifel obwaltet. Die angegebene Zeit der äusseren Berührung der Ränder bei dem Austritte, ist das Moment, wo der Ausschnitt am Sonnenrande so klein geworden war, dass ich ihn von einer kleinen wallenden Bewegung des Sonnenrandes nicht mehr sicher unterscheiden konnte. Die zu diesen Beobachtungen, so wie zu allen folgenden Messungen angewandte Vergrösserung des Heliometers beträgt 290 Mal; das Dämpfglas war dunkelroth.

Herr Professor *Argelander*, dessen Gegenwart auf der Sternwarte ich mich erfreuete, bediente sich der 90maligen Vergrösserung eines 30zolligen *Fraunhofer*schen Fernrohrs, welches sich durch grosse Deutlichkeit vortheilhaft auszeichnet. Damit sah er die beiden Berührungen des Austritts:

*) Die Abhandl. XI. beschriebene Einrichtung war noch nicht vorhanden.

$8^h\ 1'\ 41{,}''39$ und $8^h\ 4'\ 50{,}''40$ St. Z.

Die Annäherung des Planeten an den Sonnenrand erschien, mit diesem Fernrohre, nicht so stetig, als das stärkere Fernrohr des Heliometers sie mir gezeigt hat: es entstand nämlich, als die Entfernung zwischen beiden Rändern etwa eine Secunde betragen mogte, eine Verlängerung der runden Figur des Mercur, dem Sonnenrande zu, also wohl eine plötzliche Unterbrechung des Lichtfadens zwischen beiden Rändern.

Herr *Busch* wandte ein Münchener Fernrohr von 42 Zoll an und bemerkte, mit 126maliger Vergrösserung desselben, die Zeiten der beiden Berührungen

$8^h\ 1'\ 41{,}''23$ und $8^h\ 4'\ 36{,}''23$ St. Z.

2.

Unter *Irradiation* der Sonne versteht man einen, durch die Lebhaftigkeit des Sonnenlichts erzeugten Lichtrand von einigen Secunden Breite, welcher den wahren Sonnenrand umgiebt, so dass er durch Fernröhre nicht von diesem unterschieden werden kann, also die Sonnenscheibe grösser darstellt, als sie wirklich ist. Das Dasein einer solchen Irradiation hat zur nothwendigen Folge, dass bei der Annäherung eines vor der Sonne vorübergehenden Planeten an den Rand derselben, das zwischen den Rändern der beiden Gestirne befindliche Licht in dem Augenblicke verschwindet, in welchem der Rand des Planeten den *wahren* Sonnenrand bedeckt: es erfolgt also vor dem Antritte des Planeten an den *scheinbaren* Sonnenrand eine plötzliche Unterbrechung des Lichtfadens zwischen beiden. Da die Irradiation die Planetenscheibe eben so viel verkleinern muss, als sie die Sonnenscheibe vergrössert, so erfolgt die plötzliche Unterbrechung schon in dem Augenblicke wenn der scheinbare Zwischenraum zwischen beiden Rändern bis auf die doppelte Breite der Irradiation herabgekommen ist. Bei dem Eintritte zeigt sich alles dieses in umgekehrter Ordnung. — Die Grösse der Irradiation kann sowohl dadurch bestimmt werden, dass man die Breite des Lichtrandes im Augenblicke seiner plötzlichen Unterbrechung (oder auch früher wenn man der Beobachtung durch Rechnung zu Hülfe kommen will), misst, als auch durch Vergleichung des gemessenen Sonnendurchmessers mit dem aus der Zeit der Verweilung des durchgehenden Gestirns vor der Sonnenscheibe folgenden.

Wenn man die Beschreibungen vergleicht, welche die meisten Beobachter der Durchgänge der Venus durch die Sonne, in den Jahren 1761 und 1769, von den Erscheinungen entworfen haben, welche ihnen die inneren Berührungen der Ränder darboten, so kann man nicht bezweifeln, dass ihnen die Sonne wirklich durch Irradiation vergrössert erschienen ist; was einige von ihnen auch bei der äusseren Berührung angemerkt haben*), kann aber keine Folge der Irradiation sein. Die Grösse, welche *Dionis Duséjour* der Irradiation beigelegt hat, ist weniger sicher bestimmt als das Dasein derselben; denn sie hängt von den Messungen der Durchmesser ab, welche bekanntlich, selbst bis jetzt, noch nicht mit einer, jeden Zweifel zurückweisenden Sicherheit gemacht worden sind.

So sicher die Beobachtungen von 1761 und 1769 das Dasein einer Irradiation zeigen, eben so sicher zeigen die jetzt von mir gemachten, dass ich die Sonne ohne Irradiation gesehen habe. Wenn kein Widerspruch entstehen soll, so muss man annehmen, dass Fernröhre vorhanden sind, welche die Sonne durch Irradiation vergrössern, und andere, welche sie in ihrer wahren Grösse zeigen. Das *Heliometer* gehört zu den letzteren; das kleinere, von Herrn Prof. *Argelander* benutzte Fernrohr zu den ersteren, obgleich auch dieses die Erscheinung in unerwartet geringer Ausdehnung gezeigt hat. Denn wenn die Irradiation in diesem Fernrohre die von *Duséjour* angegebene Grösse hätte, so hätte der helle Zwischenraum zwischen beiden Rändern schon in der scheinbaren Entfernung von 3″ unterbrochen werden müssen, während es, nach des Beobachters Angabe, in weit kleinerer wirklich geschah.

Da der Augenschein der inneren Berührungen unzweideutig gelehrt hat, dass das Fernrohr des Heliometers die Sonne nicht merklich grösser zeigt als sie wirklich ist, so ist klar, dass eine richtige Messung des Durchmessers der Sonne, diesem dieselbe Grösse geben muss, welche man aus der Dauer der Verweilung des Planeten vor der Scheibe erhält. In dieser Beziehung ist also sowohl die Messung des Sonnendurchmessers, als auch die Bestimmung der Entfernung, in welcher der Planet bei dem Mittelpunkte der Sonne vorbeiging, unnöthig. Ich habe aber dennoch beide Bestimmungen gemacht, indem ich theils eine Bestätigung des unmittelbar gesehenen Resultats für interressant hielt, theils

*) *Encke.* Venusdurchgang von 1767. P. 97.

die Festsetzung der Entfernung des Planeten von dem Mittelpunkte der Sonne nothwendig war, um den wahren heliocentrischen Ort des Planeten zu erkennen.

Die Bestimmung der Entfernung der scheinbaren Bahn des Mercur von dem Mittelpunkte der Sonne habe ich auf vier Messungen seiner Entfernungen von entgegengesetzten Punkten ihres Randes gegründet:

St. Z.	M. Z.	Gemessene Entfern.	Positionswinkel.
4ᵘ 15′ 11″,26	1ᵘ 21′ 45″,93	8ᴿ,6919	348° 10′
31 50,46	38 22,73	27,0584	159 28
47 28,66	53 58,37	27,0808	149 57
5 3 0,26	2 9 27,42	8,7043	324 53

Jede dieser Messungen ist das Mittel aus 8 Einstellungen, wovon 4 die Entfernung des nächsten, 4 die des entferntesten Mercursrandes vom Sonnenrande angeben; die eine Objectivhälfte blieb bei allen 8 Einstellungen unverrückt stehen, die andere war bei vieren davon auf der einen, bei den vier übrigen auf der anderen Seite des Coincidenzpunktes. Der angegebene Positionswinkel zeigt die Richtung, in welcher jede Entfernung gemessen worden ist; diese wurde am Anfange jeder der vier Messungen, mit der Richtung, in welcher das Maximum oder Minimum der Entfernungen lag, näherungsweise übereinstimmend gemacht, blieb aber während der Dauer der 8 Einstellungen unverändert, wesshalb die vier Angaben nicht in aller Schärfe Minima und Maxima der Entfernungen des Planeten von dem Sonnenrande sind. Diese Einrichtung der Messungen, welche voraussetzt, dass die unmittelbar gemessene Entfernung durch Rechnung auf das Minimum oder Maximum reducirt werde, ist weit vortheilhafter als die Messung des Minimums oder Maximums selbst. Denn durch die Angabe des Positionskreises erhält man das zur Berechnung der kleinen Reduction Erforderliche, während es entweder Schwierigkeit haben, oder wenigstens unnöthigen Zeitverlust verursachen würde, wenn man darauf ausgehen wollte, den Durchschnitt der beiden Objectivhälften, bei jeder Einstellung genau in die Richtung der Mittelpunkte der beiden Gestirne zu bringen. — Der zur Berechnung des Einflusses der Strahlenbrechung auf diese Messungen nothwendige Stand der meteorologischen Instrumente war: Barom. 337ˡ,4 + 9°*R;* Therm. 50° Fahr. Hiermit finden sich die von der Strahlenbrechung befreieten Entfernungen:

R	″
8,6958	459,966
27,0696	1431,969
27,0909	1433,096
8,7073	460,574

Den Durchmesser der Sonne habe ich sowohl in verticaler, als in horizontaler Richtung gemessen. Aus zwei vollständigen Beobachtungen habe ich den verticalen Durchmesser = 35,8769 R und aus eben so vielen Beobachtungen den horizontalen = 35,9355 R gefunden; die Beobachtungszeit fällt auf 7ᵘ41,4′ St. Z. Befreiet man diese Messungen von der Einwirkung der Strahlenbrechung, so sind sie:

R	″
35,9418	1901,405
35,9462	1901,637

Reducirt man ihr Mittel auf den Mittelpunkt der Erde, so erhält man den Halbmesser = 15′ 50″,745. Die *Tabulae Regiomontanae*, welche sich auf die am Meridiankreise beobachteten Durchgänge der Sonnenscheibe durch den Meridian gründen, ergeben 15′ 51″,96: der jetzt gemessene Halbmesser ist also 1″,215 kleiner als nach der Angabe dieser Tafeln.

Den Durchmesser des Mercur habe ich in verschiedenen Winkeln mit dem Declinationskreise gemessen, und jedesmal durch ein Mittel aus drei vollständigen Beobachtungen Folgendes erhalten.

St. Z	Positions-winkel.	Gemessener Durchmesser.		Wahrer Durchmesser.
	° ′	R	″	″
2ᵘ 18′	0 0	0,2257	11,938	11,943
	22 30	2272	12,018	12,023
	45 0	2247	11,886	11,890
	67 30	2261	11,960	11,963
	90 0	2282	12,071	12,074
6ᵘ 0′	90 0	2258	11,945	11,953
	112 30	2255	11,929	11,934
	135 0	2266	11,986	11,989
	157 30	2255	11,928	11,932
	180 0	2257	11,937	11,944

Die letzte Spalte ist die Summe der vorletzten und der Strahlenbrechung. Ihre Reduction auf die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne ergiebt:

Positionswinkel.	Durchmesser.
0° 0′	6″,670
	6,665
22 30	6,714
45 0	6,640
67 30	6,681
90 0	6,743
	6,670
112 30	6,660
135 0	6,690
157 30	6,659

Die Übereinstimmung der Messungen der verschiedenen Durchmesser ist grösser, als man sie, selbst von dem Heliometer und unter günstigen Umständen zu erwarten berechtigt ist. Diese Messungen geben daher keinen Grund, eine für uns merkliche Abplattung des Mercur anzunehmen. Das mittlere Resultat ist 6″,6792 für den Durchmesser, oder 3″,3396 für den Halbmesser.

3.

Die beobachteten Zeiten der inneren Berührungen bestimmen die Zeit der nächsten Zusammenkunft des Mercur mit der Sonne unabhängig von den Halbmessern beider Gestirne; aus den zur Zeit der Mitte des Vorüberganges gemachten Messungen der Entfernungen des Planeten von entgegengesetzten Punkten des Sonnenrandes, geht die Entfernung seiner scheinbaren Bahn von dem Mittelpunkte der Sonne hervor, ohne dass auch hierauf der Halbmesser derselben Einfluss erhielte. Beides zusammen ergiebt den Ort des Planeten vergleichungsweise mit dem Orte der Sonne. — Durch die Zeiten der inneren Berührungen ist ferner die Länge der vom Planeten beschriebenen Chorde eines Kreises, dessen Halbmesser der Unterschied der Halbmesser beider Gestirne ist, gegeben, und diese Länge, verbunden mit der schon gefundenen Entfernung der Chorde vom Mittelpunkte, bestimmt den Unterschied der Halbmesser, also auch den Halbmesser der Sonne wenn der des Planeten bekannt ist. Dieser letztere ist aber aus Beobachtungen vor der Sonnenscheibe, also, wenn eine Irradiation vorhanden ist, um die Grösse dieser Irradiation zu klein gefunden, wesshalb der auf diese Art gefundene Halbmesser der Sonne um die Grösse der Irradiation *kleiner* sein wird als ihr wahrer Halb-

messer. Der aus directen Messungen, oder aus der Vergleichung der Entfernungen des Mercur von entgegengesetzten Punkten des Sonnenrandes gefolgerte Halbmesser ist dagegen um eben so viel *grösser* als der wahre. Zwischen beiden Resultaten ist ein Unterschied von der doppelten Grösse der Irradiation.

Ich werde jetzt die einzelnen Momente der Rechnung, welche dem eben vorgezeichneten Wege im Wesentlichen folgt, anführen. Die Örter des Planeten und der Sonne habe ich aus *Encke's* Astronom. Jahrbuche entlehnt; die mittlere Horizontalparallaxe der Sonne ist nach den, die beiden Venusdurchgänge des vorigen Jahrhunderts erschöpfenden Untersuchungen desselben Astronomen $=8,''5776$, der Halbmesser nach den *Tabulis Regiomontanis* angenommen worden. Auf diese Art erhält man für die in Stunden ausgedrückte mittlere Pariser Zeit t des 5ten May:

für den Mercur

Scheinb. AR.	$\alpha =$	$42^\circ\ 26'\ 53,''8817$	$-\ t.78,''79043$	$-\ tt.0,''00808$
— Decl.	$\delta =$	$16\ \ 28\ \ 11,7290$	$-\ t.68,53950$	$-\ tt.0,02015$
Horiz. Parall.	$\pi =$	$15,3645$	$+\ t.\ 0,00308$	$-\ tt.0,00003$
Halbmesser	$h =$	$5,9801$	$+\ t.\ 0,00120$	$-\ tt.0,00001$

für die Sonne

Scheinb. AR.	$\alpha' =$	$42^\circ\ 28'\ 33,''8966$	$+\ t.144,''54777$	$+\ tt.0,''00714$
— Decl.	$\delta' =$	$16\ \ 20\ \ 0,1800$	$+\ t.\ 42,60915$	$-\ tt.0,01424$
Horiz. Parall.	$\pi' =$	$8,4976$	$-\ t.\ \ 0,00008$	
Halbmesser	$h' =$	$15\ \ 51,9790$	$-\ t.\ \ 0,00917$	

Setzt man die Polhöhe von Königsberg $=54^\circ 42' 50,''4$, seinen Mittagsunterschied $=1^u 12' 39''$, die Abplattung der Erde $=0,00324$, bezeichnet man die Verbesserungen der angenommenen Geradenaufsteigungen und Abweichungen durch $\Delta\alpha$, $\Delta\alpha'$ und $\Delta\delta$, $\Delta\delta'$, die Verbesserung welche man dem angenommenen Halbmesser der Sonne hinzufügen muss um den wahren zu erhalten durch $\Delta h'$, die Grösse der Irradiation durch i, und nimmt man

$$x = \Delta\alpha \cos\delta - \Delta\alpha' \cos\delta'$$
$$y = \Delta\delta - \Delta\delta'$$

während der Dauer der Erscheinung als beständig an, so findet man:

1) aus den beiden inneren Berührungen

	Beob. Entfernung		Berechnete Entfernung
Eintritt ...	$946''{,}057 + \Delta h' - i$	=	$944''{,}960 + 0{,}5349\,x + 0{,}8449\,y$
Austritt	$945{,}972 + \Delta h' - i$	=	$940{,}638 - 0{,}9985\,x + 0{,}0545\,y$

2) aus den gemessenen Entfernungen des Mercur von entgegengesetzten Punkten des Sonnenrandes

$$459''{,}966 = 464''{,}462 + 0{,}2367\,x - 0{,}9721\,y + 1{,}0005\,(\Delta h' + i)$$
$$1431{,}969 = 1429{,}840 - 0{,}3279\,x + 0{,}9450\,y + 1{,}0003\,(\Delta h' + i)$$
$$1433{,}096 = 1430{,}340 - 0{,}4945\,x + 0{,}8692\,y + 1{,}0000\,(\Delta h' + i)$$
$$460{,}574 = 466{,}084 + 0{,}5981\,x - 0{,}8109\,y + 1{,}0004\,(\Delta h' + i)$$

Die ersten Gleichungen ergeben, wenn man sie voneinander abzieht, um dadurch $\Delta h' - i$ zu eliminiren,

$$0 = + 4''{,}237 + 1''{,}5334\,x + 0{,}7904\,y,$$

die anderen bestimmen, unter Voraussetzung dieser Relation zwischen x und y,

$$x = -3''{,}9571 \quad y = +2''{,}3163 \quad \Delta h' + i = -1''{,}2857$$

und diese Werthe der unbekannten Grössen zeigen, dass die vier Messungen unter sich in gewünschter Übereinstimmung sind, denn sie werden dadurch bis auf

$$+0''{,}02, \quad +0''{,}07, \quad -0''{,}07, \quad -0''{,}02$$

dargestellt. Setzt man die gefundenen Werthe von x und y in die durch die inneren Berührungen gegebenen Gleichungen, so erhält man daraus

$$\Delta h' - i = -1''{,}257$$

4.

Aus der Berechnung der gemachten Beobachtungen geht, übereinstimmend mit dem Zeugnisse des unmittelbaren Anblicks der Erscheinung, hervor, dass das Fernrohr des Heliometers die Sonnenscheibe nicht grösser zeigt als sie wirklich ist. Denn der um die Irradiation *verkleinerte* Halbmesser folgt aus den inneren Berührungen, für den mittleren Pariser Mittag des 5. May:

$$= 15'\,51''{,}979 - 1''{,}257 = 15'\,50''{,}722,$$

der um die Irradiation *vergrösserte* Halbmesser, den das Heliometer zeigt, ergiebt sich aus der directen Messung

$$= 15'\,51'',979 - 1'',215 = 15'\,50'',764$$

und aus den gemessenen Entfernungen des Mercur von entgegengesetzten Punkten des Sonnenrandes

$$= 15'\,51'',979 - 1'',286 = 15'\,50'',693$$

Also ist, im Mittel aus beiden, sehr nahe gleichen Bestimmungen, der *wahre* Halbmesser

$$= 15'\,50'',729 - i$$

und aus den inneren Berührungen, derselbe

$$= 15'\,50'',722 + i$$

so dass beide Bestimmungen mit der Annahme einer *verschwindenden* Irradiation auf eine unerwartete Art übereinstimmen.

Aus den Beobachtungen der äusseren Berührung beim Austritte kann nichts Anderes gefolgert werden, als die Tiefe des Ausschnittes am Sonnenrande, welcher aufhörte durch die angewandten Fernröhre sichtbar zu sein. Ich habe die beiden Beobachtungen von *Argelander* und von mir in dieser Beziehung berechnet, die von *Busch* gemachte aber weggelassen, weil die geringere Deutlichkeit des von ihm angewandten Fernrohrs wahrscheinlich Ursache geworden ist, dass er den Ausschnitt früher aus dem Gesichte verloren hat, als die Vergrösserung des Fernrohrs erwarten lassen sollte. Die Beobachtung von mir giebt den Ausdruck der Entfernung:

$$957'',941 + \Delta h' = 952'',375 - 0,9989\,x + 0,0473\,y$$

die von Herrn Professor *Argelander* gemachte:

$$957,941 + \Delta h' = 951,642 - 0,9989\,x + 0,0478\,y$$

Setzt man für x, y, $\Delta h'$ die gefundenen Werthe, so zeigen diese Ausdrücke, dass das Heliometer aufgehört hat einen Ausschnitt am Sonnenrande zu zeigen, als seine Tiefe 0'',24, das kleinere Fernrohr als sie 0'',98 betrug. Dieses ist so nahe im umgekehrten Verhältnisse der Vergrösserungen beider Fernröhre, dass nichts Anderes erwartet werden kann, als dass Herr Professor *Argelander* die äussere Berührung etwa so früh sehen musste, wie er sie wirklich gesehen hat: der Unterschied zwischen beiden Beobachtungen ist also weit entfernt, eine Unzuverlässigkeit der angegebenen Momente anzudeuten.

Die bis jetzt bekannte Bestimmung des Durchmessers des Mercur beruhet auf den zwischen den äusseren und inneren Berührungen, bei

früheren Durchgängen verflossenen Zeiten; sie hat durch unmittelbare Messungen keine so starke Bestätigung erhalten, dass das Resultat meiner Heliometerbeobachtungen dadurch aufgewogen werden könnte. Diese Bestimmung ist gewiss *zu klein*, da ihr die Voraussetzung zum Grunde liegt, dass man den Ausschnitt am Sonnenrande bis zu seinem wahren Verschwinden habe verfolgen können. Auch habe ich mit dem starken Fernrohre des Heliometers und unter den günstigen Umständen dieser Beobachtung, den Mercur weit länger am Sonnenrande gesehen, als nach der früheren Annahme des Durchmessers ($6'',01$ für die Entfernung $=1$, nach *Wurms* Rechnungen Mon. Cor. XIV. S. 283) möglich gewesen sein würde.

5.

Indem alle, bei Gelegenheit des Durchganges des Mercur durch die Sonne gemachten Beobachtungen sich gegenseitig so glücklich bestätigen, dass in dieser Beziehung nichts zu wünschen übrig bleibt, auch die Beschaffenheit der Luft und das zu den Beobachtungen angewandte Instrument einen ähnlichen Erfolg, wenn auch nicht nothwendig eine der vorhandenen gleiche Übereinstimmung, erwarten liessen, so ist aller Grund vorhanden, dem Orte des Mercur, welchen dieselben Beobachtungen ergeben, eine grosse Sicherheit zuzutrauen. Ich werde daher noch die heliocentrische Länge und Breite des Planeten ableiten.

Für die mittlere Pariser Zeit $0^u\,36'$, welche der Mitte des Durchganges ohngefähr entspricht, sind die scheinbaren Örter der beiden Gestirne, den Formeln des 3ten § gemäss:

	Mercur.	Sonne.
α	$42^\circ\,26'\,6'',605$	$42^\circ\,30'\,0'',628$
δ	$16\;27\;30,598$	$16\;20\;25,740$

Sieht man den Ort der Sonne als richtig an, so ergeben die gefundenen Werthe von x und y die Verbesserungen der Rectascension und Declination des Mercur:

$$-\,4'',126 \text{ und } +\,2'',316$$

also den beobachteten scheinbaren Ort desselben:

$$\alpha = 40^\circ\,26'\,2'',479; \quad \delta = 16^\circ\,27'\,32'',914$$

Befreiet man diesen Ort und den der Sonne von der Aberration, so findet man die wahren Örter

	Mercur.	Sonne.
α	42° 25′ 56″,450	42° 30′ 20″,611
δ	16 27 27,669	16 20 31,631

und wenn man diese, unter Annahme der Schiefe der Ecliptik = 23° 27′ 34″,57, auf diesen grössten Kreis reducirt,

Länge	44° 56′ 26″,895	44° 58′ 26″,981
Breite	+ 7 51,733	— 0,377

Wenn man die Logarithmen der Entfernungen des Mercur und der Sonne, aus den Ephemeriden

= 9,7467873 und 0,0040698

nimmt, so erhält man den wahren heliocentrischen Ort des Planeten:

M. Z. Paris.	Länge.	Breite.
May 5. 0ᵘ 36′ 0″	225° 0′ 55″,54	+ 0° 9′ 44″,41

Will man eine andere Länge und Breite der Sonne der Rechnung zum Grunde legen, nämlich

$$44° 58' 26'',981 + \Delta l \quad \text{und} \quad -0'',377 + \Delta b$$

so erhalten die Länge und Breite des Planeten dadurch Änderungen, welche nicht merklich von $+\Delta l$ **und** $-\Delta b$ **verschieden sind.**

XIII.

Beobachtung der Sonnenfinsterniss vom 15. May 1836.

Die Königsberger Sternwarte liegt der nördlichen Grenze des Raumes auf der Erde, auf welchem diese Finsterniss ringförmig erschien, so nahe, dass die Vorausberechnung nicht mit Sicherheit angeben konnte, ob die Grenze bis zu ihr, oder über sie hinaus reichen würde. Die Ephemeride von *Encke*, welche auf den *Burckhardt*schen Mondtafeln und meinen Sonnentafeln beruhet, ergab die Finsterniss für die Königsberger Sternwarte zwar noch ringförmig, allein sie gab der schmalsten Stelle des Ringes eine Breite von weniger als 4 Secunden; welche, indem sie innerhalb des Umfanges der vorkommenden Fehler der Breite des Mondes, so wie die Tafeln sie angeben, liegt, zweifelhaft liess, ob wirklich die Finsterniss ringförmig erscheinen würde. — Die Beobachtung hat gezeigt, dass die Königsberger Sternwarte ausserhalb der Grenzen der ringförmigen Erscheinung lag, dass ihr die nördliche von diesen aber so nahe war, dass der südöstliche Theil der Stadt sich wahrscheinlich schon innerhalb beider Grenzen befand. — Die Folge dieser Nähe der Sternwarte an der Grenze war, dass der Rand des Mondes, zur Zeit der Mitte der Finsterniss, den Rand der Sonne *kaum* verdeckte; unter welchem besonderen, selten oder nie von den Astronomen beobachteten Verhältnisse, eine Erscheinung in längerer Dauer hervortrat, welche unter anderen Verhältnissen so schnell verläuft, dass man sie genauer kennen zu lernen, früher weniger gute Gelegenheit gehabt hat. — Indem die hiesige Beobachtung dadurch einen Beitrag zur Kenntniss der Beschaffenheit der leuchtenden Oberfläche der Sonne verheisst. giebt sie mir Veranlassung, ihr einen besonderen Aufsatz zu widmen.

Den Anfang der Finsterniss beobachtete ich mit 179maliger Vergrösserung des Heliometers:

$$7^{u}\ 9'\ 39'',27 \text{ St. Z.} = 3^{u}\ 36'\ 19'',18 \text{ M. Z.}$$

Ich glaube ihn so früh als möglich gesehen zu haben, indem ich den Punkt des Sonnenrandes genau kannte, wo der erste Eingriff des Mondrandes erscheinen musste. — Mein Sohn *Wilhelm Bessel* (dessen frühen Tod ich zu betrauern habe) sah ihn, mit 60maliger Vergrösserung eines $3\frac{1}{2}$ fussigen *Fraunhofer*schen Fernrohrs, 3'',07 später; Herr Observator Dr. *Busch* bemerkte ihn erst 7'' später, als der Eingriff schon eine gewisse Tiefe erlangt hatte.

Das Ende der Finsterniss sah ich, mit demselben Oculare des Heliometers:

$$9^{u}\ 37'\ 43'',00 \text{ St. Z.} = 6^{u}\ 3'\ 58'',66 \text{ M. Z.}$$

Wilhelm Bessel sah es 3'',7 früher; *Busch* 2'',3 später. Die von Beiden angewandten Fernröhre waren beträchtlich schwächer als das Heliometer, wesshalb Beide den Mond hätten früher aus den Augen verlieren sollen als ich. Dass Herr Dr. *Busch* sein Verschwinden später angiebt, rührt wahrscheinlich von dem störenden Geräusche her, welches viele Zuschauer machten, die die Finsterniss neben der Sternwarte am besten zu sehen glaubten.

Während der Finsterniss zeigte der sich vor der Sonne befindende Rand des Mondes, wie gewöhnlich, Erhöhungen und Vertiefungen. Die Hörner, welche um die Zeit der nächsten Zusammenkunft sehr fein wurden, hatten, so weit man nach dem Anblicke urtheilen konnte, an ihrem äusseren Rande die gleichmässige Krümmung des Sonnenrandes; an dem inneren aber zeigten sie die Unregelmässigkeiten des Mondrandes. Sie erschienen also, wenn sie sich an einer nicht merklich bergigten Stelle des Mondrandes endigten, als scharf auslaufende Spitzen; während ihr Ende, wenn es sich an dem Abhange eines Berges befand, die von diesem vorgeschriebene Form annahm. Nie war eine Abstumpfung der Hörner vorhanden, welche nicht augenscheinlich dieser Ursache zuzuschreiben gewesen wäre. Es kam nichts vor, was auf eine *Irradiation* des Sonnenbildes in dem angewandten Fernrohre hätte deuten können; so dass die gegenwärtige Beobachtung, in dieser Beziehung, völlig mit

der in der vorigen Abhandlung beschriebenen des Mercursdurchganges im J. 1832 übereinstimmte.

Von den Hörnerspitzen getrennte Theile der Sonnenscheibe, welche sich wahrscheinlich gezeigt haben würden, wenn diese Spitzen, zu der Zeit wo sie sehr fein waren, sich an sehr rauhen Theilen des Mondrandes geendigt hätten, erwartete ich vergebens zu sehen. Allein etwa 25″ vor der nächsten Zusammenkunft erschien, nahe an dem Ende der oberen Spitze, ein Punkt, welcher zwar bei Weitem nicht das helle Licht der Sonnenscheibe besass, jedoch in dem starken Fernrohre des Heliometers augenfällig genug war. Da die Hörner sich, um diese Zeit, einander stark genähert hatten, so erwartete ich jeden Augenblick, den Ring sich bilden zu sehen; allein dieses erfolgte nicht, sondern der erwähnte Punkt wurde nur lichtstärker, und ausser ihm erschienen noch andere ähnliche Punkte, welche sich bald darauf vereinigten und auf diese Art den ganzen, zwischen den Hörnerspitzen liegenden Theil des Mondrandes sichtbar machten. Ich erwartete noch immer die Entstehung des Ringes selbst, und bemerkte erst dass sie nicht erfolgen würde, als das Unsichtbarwerden einzelner Punkte des Mondrandes zeigte, dass die Finsterniss wieder im Abnehmen war. Dieses war $8^u 27' 11\overset{''}{,}46$ St. Z. $= 4^u 53' 38\overset{''}{,}67$ M. Z.; etwa 10 Secunden später sah ich keine Spur des Mondrandes mehr.

Während der Zeit der Sichtbarkeit des Mondrandes konnte ich Berge und Thäler an demselben deutlich unterscheiden; die letzteren erschienen heller als die ersteren. Die Helligkeit des Mondrandes mogte sich zu der Helligkeit der Sonne verhalten, wie die Helligkeit des von der Erde, bald nach und kurz vor dem Neumonde, erleuchteten Mondrandes sich zu der Helligkeit des von der Sonne erleuchteten verhält. Aus dieser Angabe geht hervor, dass das sichtbare Hervortreten des Mondrandes auffallend genug war um nicht übersehen werden zu können. Auch übersahen es drei andere Beobachter nicht, nämlich Herr Dr. *Busch*, Herr Professor *Zornow* und *Wilhelm Bessel;* die von jedem derselben angegebene Zeit der grössten Deutlichkeit der Erscheinung traf nahe mit der Zeit zusammen, zu welcher, der späteren Rechnung zufolge, die nächste Zusammenkunft der beiden Gestirne stattfand. Als die Hörner sich einander am nächsten gekommen waren, schätzte ich ihre Entfernung auf höchstens 4 Minuten. Ich hätte diese kleinste Entfernung

messen können, allein da ich die völlige Bildung des Ringes erwartete, so hielt ich nicht für angemessen, etwas zu unternehmen, was die Beobachtung der, jedenfalls sehr kurz zu erwartenden, Dauer des Ringes hätte in Gefahr bringen können.

Ich habe also, vielleicht 15″ lang, den zwischen den Hörnerspitzen liegenden Theil des Mondrandes ganz gesehen, einzelne Punkte desselben länger. Ich habe die Ungleichheiten dieses Randes gesehen, die Vertiefungen in stärkerem, die Erhöhungen in schwächerem Lichte. Dieses Licht war *weit* schwächer als das Licht der Sonnenscheibe, aber stärker als das Licht des von der Sonne erleuchteten Mondes. Das letztere geht aus der Sichtbarkeit dieses Lichts in den mit Dämpfgläsern versehenen Fernröhren hervor, welche das gewöhnliche Mondlicht nicht hätte durchdringen können. Um hierüber keinen Zweifel zu lassen, führe ich einen gemachten Versuch an. Nach dem Verhältnisse der scheinbaren Grössen der Scheiben der Sonne und des Mondes, verdunkelte der Mond, zur Zeit der Mitte der Finsterniss, etwa acht Neuntel der Sonne, so dass die Helligkeit, welche sie der Atmosphäre mittheilte, etwa ein Neuntel der Helligkeit war, welche sie verbreitet haben würde, wenn der Mond sie nicht zum Theil verdeckt hätte. Ich versuchte daher, ob ich den Mond am Tage, gegen die Zeit des Sonnenunterganges, wo das Tageslicht bekanntlich schon in einem weit grösseren Verhältnisse geschwächt ist, mit demselben Fernrohre und demselben Dämpfglase sehen könne. Dieses geschah am 14ten Septr., und es ergab sich, dass ich den Mond, dessen Rand ich in der Mitte des Sehefeldes des Fernrohrs des Heliometers erhielt, nicht nur zur Zeit des Sonnenunterganges, sondern noch um $6^u\,39'$ M. Z., 23 Minuten nach demselben, *nicht* sehen konnte. Zu dieser Zeit wurde der Versuch durch Wolken unterbrochen; er war aber mehr als hinreichend fortgesetzt, um keinen Zweifel darüber zu lassen, dass ich den durch Sonnenlicht erleuchteten Mond, zur Zeit der grössten Verfinsterung, nicht hätte sehen können. Das Licht welches ich gesehen habe, ist also weit stärker gewesen als Mondlicht; desto mehr, da ich es am Orte der Sonne selbst, wo die Erleuchtung der Atmosphäre am stärksten ist, gesehen habe.

Was Herr *van Swinden*, bei Gelegenheit der Sonnenfinsterniss am 7ten Septr. 1820 in Amsterdam gesehen hat, scheint der im 1ten Bande der Schriften der *Astronomical Society* enthaltenen Beschreibung zufolge,

dasselbe gewesen zu sein, was ich jetzt gesehen habe. Diese Finsterniss war in Amsterdam ringförmig, allein eine der parallelen Linien, zwischen welchen die Mondscheibe sich, beziehungsweise auf die Sonnenscheibe bewegte, durchschnitt diese so nahe am Rande, dass die Erscheinung des Ringes nur etwa dreiviertel Minuten dauerte, obgleich der Unterschied der Halbmesser beider Gestirne, nach Herrn *Moll's* Rechnung, 1′ 5,″5 betrug. Unter diesen Umständen gingen die Annäherung der Ränder vor dem Anfange des Ringes, und ihre Entfernung voneinander nach seinem Ende, weniger schnell als unter anderen vor sich, so dass Herr *van Swinden* das was diesen Momenten voranging und folgte, *weit langsamer* verlaufen sah, als gewöhnlich bei ringförmigen und totalen Finsternissen der Fall ist. Hierdurch erlangte er Zeit, dieselbe Erscheinung, welche sich in Königsberg in noch längerer Dauer zeigte, genauer kennen zu lernen, während sie, unter anderen Umständen, ihres gar zu schnellen Verlaufes wegen, vielleicht nicht bestimmt genug aufgefasst werden kann. Herr *van Swinden* bemerkte, eben so wie ich, einen hellen, beide Hörnerspitzen verbindenden Bogen, erwähnt aber nicht der Ungleichheiten des Mondrandes, welche ich an demselben gesehen habe. Indem die Dauer dieser Erscheinung in Amsterdam, trotz der Kleinheit der relativen Bewegung der beiden Ränder, sehr kurz gewesen ist, so dass sie sich nur „unmittelbar vor der Bildung des Ringes“ zeigte und „wenige Augenblicke nachher“ der Ring gebildet und der Bogen daher verschwunden war, so hat es vermuthlich an Zeit gefehlt, auf Alles, was sich, bei noch langsameren Verlaufe der Erscheinung, in Königsberg gezeigt hat, aufmerksam zu werden. Ich glaube daher nicht, dass aus der unterlassenen Erwähnung der Ungleichheiten des Mondrandes ein Grund hergenommen werden kann, die Gleichheit beider Wahrnehmungen in Zweifel zu ziehen. Dagegen ist ein anderer Unterschied zwischen beiden Beschreibungen, welcher näher beleuchtet werden muss. Ich glaube die sichtbare, beide Hörner verbindende Linie, am Mondrande selbst hinlaufen gesehen zu haben, und kann hieran in der That nicht zweifeln, da ich die Ungleichheiten dieses Randes an derselben wahrgenommen habe; Herr *van Swinden* beschreibt sie so, als hätte sie einen kleineren Krümmungshalbmesser gehabt als der Mond, so dass sie sich in ihrer Mitte von dem Mondrande entfernte, während sie an ihren Enden mit ihm zusammenfiel. Er sagt nicht, worauf diese

Auffassung der Figur der Linie beruhet. Der unmittelbare Anblick der Erscheinung hat sie nicht ergeben können, indem *nichts anderes* als die helle Linie sichtbar gewesen ist, man also einen etwanigen Zwischenraum zwischen ihr und dem Mondrande nicht hat *sehen* können. Vielleicht hat Herr *van Swinden*, durch ein scharfes und geübtes Augenmaass bemerkt, dass die sichtbare Linie eine stärkere Krümmung hatte als der *Sonnen*rand, was wirklich, auch ohne einen Zwischenraum zwischen ihr und dem Mondrande, wegen des kleineren Krümmungshalbmessers des letzteren, der Fall gewesen sein muss. Die Linie entfernte sich wirklich von dem Rande der *Sonne*, was vielleicht die Vorstellung veranlasst hat, sie habe sich auch vom Rande des *Mondes* entfernt. Das richtige Verständniss der dem Aufsatze in den Schriften der *Astronomical Society* beiliegenden Zeichnung wird übrigens erst durch die Beschreibung, zu welcher sie gehört, möglich; denn diese fordert, dass man das was die Zeichnung als einen *hellen* Zwischenraum zwischen dem Mondrande und der sichtbaren Linie darstellt, sich als *dunkel* vorstelle. Ich glaube, nach dieser Untersuchung des scheinbaren Unterschiedes in den Beschreibungen beider Wahrnehmungen, nicht, dass in Amsterdam etwas Anderes gesehen wäre als in Königsberg. — Herr *Greve*, ein zweiter Beobachter derselben Finsterniss in Amsterdam, bemerkt nichts, was auf eine Entfernung der hellen Linie von dem Mondrande deuten könnte; dass, in der Beschreibung seiner Wahrnehmung, die Dauer der Sichtbarkeit dieser Linie auf zwei *Minuten* angegeben ist, halte ich für einen Schreib- oder Druckfehler, welcher in zwei *Secunden* zu verbessern ist*). Jene lange Dauer ist wenigstens unvereinbar mit dem, was Herr *van Swinden* und ich gesehen haben; auch mit dem was Herr *Greve* unmittelbar vor und nach der Entstehung der hellen Linie, während zwar nicht angegegebener, aber jedenfalls sehr kurzer Zwischenzeit, bemerkte.

Aus der obigen Angabe über die Helligkeit der von mir wahrgenommenen, die Hörnerspitzen verbindenden Linie, geht hervor, dass sie viel zu hell war, um sie durch gewöhnlich reflectirtes Sonnenlicht, geschweige denn durch Dämmerungslicht auf dem Monde, erklären zu

*) Die Angabe ist „2′ of time“ — so dass nur das Secundenzeichen, statt des Minutenzeichens, gesetzt zu werden brauchte um die Schwierigkeit zu entfernen.

können. Ich glaube auch nicht, dass eine andere Art von *Biegung* der Sonnenstrahlen denkbar ist, welche *mehr* Licht auf die dunkele Seite des Mondes bringen könnte, als die der Sonne zugewandte unmittelbar empfängt. Wenn dieses zugegeben wird, so scheint nichts übrig zu bleiben, als die Annahme, dass die Sonne selbst einen Umkreis von leuchtender Materie besitzt, welcher von dem Mondrande nicht verdeckt werde, während dieser die Scheibe der Sonne selbst verdeckte. Der Theil dieses Umkreises, der in den beiden, angeführten ringförmigen Sonnenfinsternissen sichtbar wurde, muss eine sehr geringe Ausdehnung besitzen, indem er sich nur zeigte, als der Mondrand den Sonnenrand *kaum* verdeckte. Dass man ihn nicht am unverdeckten Sonnenrande bemerkt, erklärt sich theils aus dieser geringen Ausdehnung, theils aus seiner, vergleichungsweise mit der Helligkeit der Sonnenscheibe selbst geringen Helligkeit.

Ich werde auszumitteln suchen, in welcher Entfernung von dem Sonnenrande der Mondrand war, während die beschriebene Erscheinung sich zeigte. Welche Mittel man aber auch anwenden möge, um zu der Kenntniss dieser Entfernung zu gelangen, so vermeidet man die Schwierigkeit nicht, welche die Unregelmässigkeiten des Mondes erzeugen, indem sie verursachen, dass der Mond weder als ein Kreis noch überall als eine krumme Linie von angeblicher Figur erscheint.

Ein Datum, welches man benutzen kann, um ein Urtheil über die Entfernung der Ränder, da wo sie am grössten war, zu erhalten, ist die Schätzung der Entfernung der Hörnerspitzen zur Zeit der Mitte der Finsterniss. Wenn man den scheinbaren Halbmesser des Mondes um diese Zeit durch h, den der Sonne durch h', die Entfernung der Hörnerspitzen durch $2d$ bezeichnet, so findet man die verlangte Entfernung der Ränder:

$$= \frac{dd}{h+\sqrt{(hh-dd)}} - \frac{dd}{h'+\sqrt{(h'h'-dd)}}$$

Setzt man $h = 894{,}''9$, $h' = 948{,}''7$, $2d = 4'$ oder $d = 120''$, so ergiebt diese Formel $0{,}''46$, welches also die Grösse sein würde, bis zu welcher der Mondrand sich von dem Sonnenrande entfernte wenn die vorausgesetzte Figur, die den Tafeln gemäss angenommenen Halbmesser und die Schätzung von d richtig wären. Von der letztern Seite erwarte ich keine erhebliche Vergrösserung dieser Entfernung, indem der Einfluss eines annehm-

baren Fehlers der Schätzung nicht beträchtlich ist, und ich die Entfernung der Hörnerspitzen eher zu gross, als zu klein angegeben zu haben glaube. Die Halbmesser des Mondes und der Sonne können eben so wenig hier, wo eine Genauigkeit von einigen Hunderteln einer Secunde kaum ein Interesse haben kann, einen erheblichen Fehler erzeugen. Aber Abweichungen der Figur des Mondes von der kreisförmigen können einen beträchtlichen Einfluss erhalten, zumal wenn die Hörner sich in Vertiefungen des Mondrandes endigten, welche eine Erhöhung desselben einschlossen: in diesem Falle könnte die Entfernung des Mondrandes vom Sonnenrande, innerhalb welcher die Lichtlinie sichtbar war, um so viel grösser sein als $0\overset{\prime\prime}{,}46$, als die Erhöhung sich über die Vertiefung erhebt.

Man kann auch zu der Überzeugung gelangen, dass, wenn die Entfernung der Ränder nur äusserst wenig grösser gewesen wäre als sie war, die Lichtlinie nicht mehr ununterbrochen, von einem Horne zum anderen gegangen sein würde. Ich habe nämlich oben die Zeit angegeben, wenn die Lichtlinie ihren ununterbrochenen Zusammenhang verlor ($4^u\,53'\,38\overset{\prime\prime}{,}67$ M.Z.): wenn ausgemittelt wird, wieviel grösser die Entfernung der Ränder zu dieser Zeit war, als zur Zeit ihrer kleinsten Entfernung, so ist dieser Unterschied die zu der letzteren Zeit stattfindende Breite der Lichtlinie in ihrer Mitte. — Um die Zeit der kleinsten Entfernung der Ränder, und dadurch die Zwischenzeit zwischen ihr und der Zeit des Unsichtbarwerdens einzelner Punkte der Lichtlinie, kennen zu lernen, habe ich die Königsberger Beobachtung des Anfanges und des Endes der Finsterniss berechnet, in der Absicht, dadurch den Fehler der Elemente der Finsterniss grösstentheils aus dem Resultate zu schaffen. Unter der Anwendung der Werthe dieser Elemente, welche §. 4. der Abhandl. X. mitgetheilt worden sind, und des daselbst angenommenen Axenverhältnisses der Erde $= 300{,}7047 : 299{,}7047$ habe ich den Ausdruck des Mittagsunterschiedes erhalten:

Anfang . . . $\omega = 1^u\,12'\,47\overset{\prime\prime}{,}32 + 2{,}159\,\varepsilon - 0{,}040\,\zeta + 2{,}158\,\eta$
Ende $42{,}61 + 2{,}159\,\varepsilon - 0{,}238\,\zeta - 2{,}173\,\eta$

worin ε, ζ, η durch die drei ersten Glieder der Formel (113) der angeführten Abhandlung, nämlich

$$\nu.\varepsilon + \nu \operatorname{tang}\psi.\ \zeta + \nu \sec\psi.\eta$$

erklärt werden. Die halbe Summe dieser Ausdrücke, verglichen mit dem bekannten Werthe von $\omega = 1^u\,12'\,39''$, giebt die Gleichung

$$0 = + 5{,}''965 + 2{,}159\,\varepsilon - 0{,}139\,\zeta - 0{,}0075\,\eta.$$

Ferner habe ich die mittlere Königsberger Zeit der kleinsten Entfernung der Ränder, durch dieselben Elemente,

$$4^{u}\ 53'\ 25{,}''69 - 2{,}405\,\varepsilon + 0{,}162\,\zeta$$

gefunden, und wenn man aus diesem Ausdrucke, mittelst der auf den Beobachtungen beruhenden Gleichung, ε eliminirt:

$$4^{u}\ 53'\ 32{,}''33 + 0{,}007\,\zeta - 0{,}008\,\eta$$

welches Resultat von den Elementen der Finsterniss fast unabhängig ist, und, wegen der wahrscheinlichen Genauigkeit der Beobachtungen, sehr nahe richtig sein wird. Auf diese Zeit der kleinsten Entfernung der Ränder folgte die Zeit des Verschwindens einzelner Punkte der Lichtlinie nur 6,″34, in welcher Zwischenzeit die Enfernung der Ränder sich nur um 0,″06 vergrössert hat. Es geht also hieraus hervor, dass die Lichtlinie, in der Mitte zwischen beiden Hörnerspitzen, nur wenige Hundertel einer Secunde über den Mondrand hervorragte; so wie aus der Verbindung mit der vorher ausgemittelten Entfernung der beiden Ränder (0,″46), dass ihre ganze Ausdehnung eine halbe Secunde kaum überschreitet.

Da aus der eben mitgetheilten Rechnung klar wird, dass die Königsberger Sternwarte fast genau auf der Grenze liegt, ausserhalb welcher man die Lichtlinie nicht mehr zusammenhängend gesehen haben würde, so ist nicht unerwartet, dass die Finsterniss, in anderen Theilen der Stadt *ringförmig* erschienen ist. Ich habe durch Rechnung gefunden, dass die Entfernung der Ränder sich auf einer von der Sternwarte ausgehenden Linie, deren, von Norden rechts herum gezähltes Azimuth = 117° 40′ ist, am schnellsten änderte. Unter den Vielen, welche die Finsterniss in Königsberg durch geschwärzte Gläser angesehen haben, ist ein aufmerksamer und zuverlässiger Freund von mir, dessen Haus im Azimuthe 140° und 802 Toisen von der Sternwarte entfernt liegt; also ziemlich nahe in der Richtung der schnellsten Änderung der Entfernung der Ränder und dabei in so beträchtlicher Entfernung von der Sternwarte, dass dort schon ein merklicher Unterschied der Erscheinung hervortreten konnte. Er glaubt in der That, den Ring „einen Augenblick lang“ völlig gebildet gesehen zu haben, und ist hierüber nur in

sofern unsicher, als er dem Zeugnisse der blossen Augen trauen musste. Ich habe berechnet, dass, an dem angegebenen Orte, der Mondrand 0,"37 näher an dem Sonnenrande erschien, als auf der Sternwarte. Wenn man diese Wahrnehmung mit ähnlichen vergleicht, welche in der Nähe der Sternwarte gemacht wurden, wo eben so wenig das unbewaffnete Auge, als das durch ein Fernrohr unterstützte, auf die Vorstellung von der *Schliessung* des Ringes gerieth, so kann man auch daraus folgern, dass der Mondrand, auf der Sternwarte, nur einige Zehntel einer Secunde über den Sonnenrand hinaus gewesen ist.

Alles was ich von der Finsterniss angeführt habe, vereinigt sich also, zu zeigen, dass die oft erwähnte Lichtlinie nur sichtbar wird, wenn der Mondrand innerhalb etwa einer halben Secunde von dem Sonnenrande entfernt ist; auch dass ein beträchtlich grösserer Werth dieser Grenze, z. B. von einer ganzen Secunde, unwahrscheinlich ist. — Nach dem, über den Grad der Helligkeit dieser Linie oben Gesagten, scheint sie mir nur durch die Annahme erklärt werden zu können, dass eine leuchtende Masse die Sonne umgebe, deren Lichtstärke sich mit der Entfernung so schnell vermindert, dass bei dem Grade von Tageshelligkeit, welchen beide ringförmigen Sonnenfinsternisse noch übrig liessen, nur der Theil von ihr gesehen werden konnte, welcher sich bis auf etwa eine halbe Secunde von dem Sonnenrande entfernte.

XIV.

Neue Berechnungsart für die Methode der Entfernungen des Mondes von anderen Himmelskörpern.

Die vielfältigen, vorhandenen Vorschriften zur Ableitung der geographischen Länge eines Ortes aus der daselbst, zu gegebener Zeit, gemessenen Entfernung des Mondes von einem anderen Himmelskörper, sind sämmtlich weit entfernt, nichts zu wünschen übrig zu lassen: alle entfernen sich mehr oder weniger von der Wahrheit; die meisten opfern die Genauigkeit des Resultats absichtlich der Abkürzung der Rechnung auf. Dieses letztere geht von der Ansicht aus, dass dem Seefahrer die Anwendung der Methode *erleichtert* werden müsse, selbst wenn dadurch die Unsicherheit ihres Resultats über die Grenzen hinaus vergrössert wird, welche der Schwierigkeit der Beobachtungen zur See und den vorhandenen Unvollkommenheiten der astronomischen Tafeln angemessen sind.

Im Allgemeinen kann man eine auf Kosten der Genauigkeit erlangte Erleichterung für *erlaubt* halten, wenn der Fehler, den man dadurch begeht, beträchtlich kleiner ist als der aus unvermeidlichen Ursachen entstehende; auch wenn der aus beiden zusammengesetzte Fehler nicht so gross ist, dass er der Erreichung des Zweckes der Anwendung entgegenträte. Allein, so viel ich weiss, ist das Verhältniss der Fehler der Berechnung der Beobachtungen der Entfernungen des Mondes, zu den Fehlern der Beobachtungen selbst und der Tafeln, nie ordentlich untersucht worden, was übrigens auch nur bedingungsweise geschehen könnte, indem unter verschiedenen Verhältnissen gemachten Beobachtungen ein sehr verschiedener Grad von Genauigkeit gegeben werden kann; ferner kann der Zweck der Anwendung der Methode in gewissen

Fällen die grösste erreichbare Genauigkeit ihres Resultats wünschenswerth machen, während diese, in anderen Fällen kaum einen Werth hat. Wenn z. B. Entfernungen des Mondes beobachtet werden, um den ganz unsicher gewordenen Ort eines Schiffes auf dem hohen Meere wiederzufinden, so wird vielleicht ein Fehler der Länge von einem halben Grade oder mehr unerheblich erscheinen; wenn dagegen der Zweck der Beobachtungen ist, den Gang auf dem Schiffe befindlicher Chronometer von Zeit zu Zeit zu prüfen, oder die Länge eines Aufenthaltsortes möglichst genau festzusetzen, so wird man denselben Fehler der vorher unerheblich erschien, gern vermeiden, indem man den Fehler des Resultats, durch genauere Rechnung, auf seine unvermeidliche Grösse zurükführt. — Ich glaube, dass die Vervollkommnung und allgemeinere Verbreitung, welche die Chronometer erfahren haben, die *erstere* Anwendung der Methode der Mondsentfernungen schon bedeutend eingeschränkt haben und sie noch mehr einschränken werden, so dass das Gewicht dieser Methode, in späterer Zeit nur in der *anderen* Anwendung hervortreten wird. Je mehr man darauf ausgehen wird, durch häufige, an einander nahen Tagen gemachte Wiederholungen der Beobachtungen, der Prüfung der Chronometer, oder der Bestimmung einer festen Länge, möglichst grosse Sicherheit zu geben, desto mehr wird man das Bedürfniss einer genaueren Berechnungsart der Beobachtungen fühlen.

Indem ich hierdurch gezeigt habe, dass Anwendungen der Methode der Mondsentfernungen vorkommen, in welchen eine genaue Berechnungsart derselben wünschenswerth ist, will ich nicht läugnen, dass ich eine solche gesucht haben würde, wenn ich ihr auch allein ein astronomisches Interesse beilegte. Jetzt werde ich näher angeben, was die gebräuchliche Berechnungsart, abgesehen von den schon erwähnten, absichtlichen Beschränkungen ihrer Genauigkeit, zu wünschen übrig lässt.

Die vorgeschlagenen Arten, die Abplattung der Erde in Rechnung zu bringen, sind noch nicht so geschmeidig, dass sie in allgemeine Anwendung gekommen wären, obgleich die Voraussetzung der Kugelgestalt der Erde einen mehr als 15″ betragenden Fehler der Rechnung zur Folge haben kann. — Ferner wird die Befreiung der gemessenen Entfernung von der Strahlenbrechung dadurch fehlerhaft, dass die Strahlenbrechungen für die Mittelpunkte der Gestirne berechnet werden, wäh-

34*

rend sie für diejenigen Punkte ihrer Ränder berechnet werden sollten, zwischen welchen man die Entfernung gemessen hat. Dieser Fehler erlangt seinen grössten Einfluss wenn Mond und Sonne in Einem Verticalkreise, beide auf derselben Seite des Scheitelpunkts stehen und die Entfernung ihrer nächsten Ränder gemessen wird, denn dann ist derselbe der Summe der Veränderungen der Strahlenbrechung vom Mittelpunkte bis zum Rande jedes der beiden Gestirne gleich; er beträgt, wenn eins derselben resp. 20°, 15°, 10°, 5° über dem Horizonte, das andere beträchtlich höher steht, etwa 3″, 5″, 9″, 27″; und selbst dem letzten, grössten Fehler wird man wirklich ausgesetzt sein, indem es nicht rathsam sein würde, einen grösseren Theil der sichtbaren Hälfte der Himmelskugel, als nothwendig geschehen muss, der Anwendung der Mondsmethode zu entziehen. Die Grenze dieses Theils wird durch diejenigen Störungen der Strahlenbrechung bestimmt, welche durch die Nähe des Horizonts erzeugt, aber durch die meteorologischen Instrumente nicht erkannt werden; dass diese selbst in der Zenithdistanz von 85° noch nicht so beträchtlich sind, dass sie nöthigten die Grenze höher hinauf zu verlegen, habe ich durch Beobachtungen gezeigt *).

Zu diesen, der Rechnungsmethode angehörigen Fehlern, gesellen sich noch andere, welche nicht eigentlich aus der Methode, sondern aus der gebräuchlichen Art sie anzuwenden entstehen. Diese fordert nämlich die Benutzung von Hülfstafeln, welche die Horizontalparallaxe des Mondes und seine scheinbare Höhe zu Argumenten haben und entweder den Unterschied der Höhenparallaxe und Strahlenbrechung, oder einen davon abhängigen Logarithmen **) enthalten, dessen jedesmalige Berechnung die Arbeit beträchtlich vermehren würde. Diese Tafeln können aber nur unter der Voraussetzung eines mittleren Zustandes der Strahlenbrechung berechnet werden, welche häufig beträchtliche Fehler verursachen wird. Um ihre Grösse anschaulich zu machen, führe ich hier die Veränderungen an, welche die Strahlenbrechung in verschiedenen Zenithdistanzen erfährt, wenn sich der Barometerstand um einen englischen Zoll, der Thermometerstand um 40° Fahr. ändert:

*) Astr. Beobb. auf der Sternwarte in Königsberg. VII. Abtheilung. S. XXVII.

**) *Logarithmic Difference*, nach der Benennung der Englischen Navigationsbücher.

Z. D.	Barom.	Therm.
40°	1,″6	3,″8
50	2,0	4,6
60	3,4	7,8
70	5,3	12,4
75	7,1	16,8
80	10,6	25,4
85	19,3	48,5

Ich bemerke zu dieser Tafel noch, dass die grösseren, darin vorkommenden Einflüsse der Veränderlichkeit des Standes der meteorologischen Instrumente, nicht etwa durch Ausschliessung von Beobachtungen, welche bei grösseren Zenithdistanzen der Gestirne gemacht werden, vermieden werden sollen, sondern dass man die erwähnten Tafeln sogar noch weiter, bis zur Zenithdistanz von 87° fortgesetzt hat, ohne die Seefahrer vor grossen Zenithdistanzen zu warnen. — Offenbar kann die Strahlenbrechung nur richtig in Rechnung gebracht werden, wenn zur Zeit der Messung einer Entfernung des Mondes, auch die Stände des Barometers und Thermometers beobachtet werden. Diese Beobachtung ist also unerlässliche Bedingung der Erlangung des richtigen Resultats der Messung.

Auch sollte, meines Erachtens, die Auflösung der Aufgabe so eingerichtet werden, dass das *Messen* der Höhen der Gestirne vermieden und die Beobachtung auf die Messung der Entfernung allein beschränkt wird. Denn durch die scheinbare, zu gegebener Zeit des Beobachtungsortes gemessene Entfernung, durch die Polhöhe und durch die in den Ephemeriden enthaltenen Örter der Gestirne, ist die Aufgabe völlig bestimmt, und wenn man noch Anderes aus Beobachtungen ableitet und in der Rechnung anwendet, so ist die Folge davon, dass die Fehler dieser Beobachtungen das eigentliche Resultat der Entfernungsmessung mehr oder weniger entstellen. Dieser Nachtheil würde jedoch von geringer Bedeutung für die Anwendungen sein, wenn man die Höhen der Gestirne immer mit einiger Genauigkeit messen könnte; aber oft ist die Undeutlichkeit des Meereshorizonts, oder die unregelmässige Einwirkung der Strahlenbrechung auf die Zenithdistanz in welcher er erscheint, so störend, dass das Messen der Höhen nur eine rohe Annäherung gewähren kann; in gewissen Fällen ist der Horizont ganz unsichtbar, jede Messung

der Höhen fällt weg und die Rechnung tritt nothwendig an ihre Stelle. — Die Veranlassung der Beeinträchtigung des Resultats der Hauptbeobachtung durch das *Messen* der Höhen, würde in geringerem Maasse vorhanden sein, wenn man die Arbeit vermindern könnte, welche ihre *Berechnung* fordert; diese Verminderung ist daher eine der Verbesserungen der bisherigen Rechnungsart, welche man zu erlangen suchen muss.

Die angeführten Unvollkommenheiten des Resultats der bisherigen Berechnungsart der Messungen der Entfernung des Mondes von anderen Gestirnen, könnte man zwar *verbesseren*, ohne eine gänzlich veränderte Berechnungsart zu suchen; allein die letztere, deren Darstellung der Zweck dieser Abhandlung ist, führt weit leichter zum Ziele. — Als diese neue Methode im J. 1832 in den *Astronom. Nachrichten* zuerst bekannt wurde, hielt mein Freund *Schumacher* sie für geeignet zur Anwendung der Seefahrer, und veranstaltete daher die Berechnung so eingerichteter Ephemeriden wie sie sie fordert. Diese sind für die Jahre 1835 bis 1838 incl. erschienen *), allein sie scheinen der Methode den beabsichtigten Eingang nicht verschafft zu haben. Da diese Methode indessen ihr *richtiges* Resultat nicht durch eine Rechuung von lästiger Weitläuftigkeit erkauft, sondern eine nur wenig grössere Arbeit fordert, als die ist, wodurch man das unrichtige Resultat der älteren Methode erlangt, so glaube ich, dass sie, trotz des jetzigen Fehlschlagens der Bemühungen sie einzuführen, *nicht für immer* der Vergessenheit übergeben sein wird. Ich erwarte vielmehr, dass eine *nicht ferne* Zeit, die Anwendung der Methode der Mondsentfernungen, auf die oben schon erwähnten Fälle der Berichtigung der Chronometer und der Bestimmung fester Längen beschränken, und dass dann Veranlassung vorhanden sein wird, nicht der Leichtigkeit der Rechnung allein, sondern auch den Vernachlässigungen wodurch ihre Kürze erkauft wird, einiges Gewicht beizulegen.

1.

Die bisher angewandten Berechnungsarten der Mondsentfernungen sind, so verschiedenartig sie auch entwickelt worden sind, sämmtlich von Einer Ansicht ihrer Aufgabe ausgegangen: es werden nämlich zwei

*) Distances of the Sun and the four Planets Venus, Mars, Jupiter and Saturn from the Moon &c. Copenhagen 1834—1837.

sphärische Dreiecke betrachtet, deren Seiten resp. die scheinbaren Zenithdistanzen und die scheinbare Entfernung, und die wahren Zenithdistanzen und die wahre Entfernung sind, und welche beide einen gemeinschaftlichen Winkel am Scheitelpunkte haben; die Reduction der scheinbaren Entfernung auf die wahre wird dadurch erlangt, dass die Veränderung der dem gemeinschaftlichen Winkel gegenüberstehenden Seite gesucht wird, welche aus den, von der Parallaxe und der Refraction herrührenden Veränderungen der ihn einschliessenden Seiten entsteht.

Die Berechnungsart, welche ich hier mittheilen werde, geht von einer anderen Ansicht der Aufgabe aus. Ich werde sie zuerst im Allgemeinen erläutern, ohne mich dabei auf die Entwickelung ihrer einzelnen Momente einzulassen; dann werde ich, ohne alle Rücksicht auf das Bedürfniss und die Bequemlichkeit der Seefahrer, diese Entwickelung richtig durchführen; endlich werde ich Abkürzungen aufsuchen, welche die Genauigkeit des Resultats wenig beeinträchtigen und welche benutzt werden können wenn es sich um wirkliche Anwendung handelt. — Ich werde zuerst den einfachsten Fall voraussetzen, nämlich, dass das Gestirn zwischen welchem und dem Monde die Entfernung gemessen wird, ein Fixstern, also ein Punkt ohne Halbmesser und Parallaxe ist. Der zusammengesetztere Fall, welcher eintritt wenn das mit dem Monde verglichene Gestirn Halbmesser und Parallaxe zeigt, wird später auf den einfacheren zurückgeführt werden.

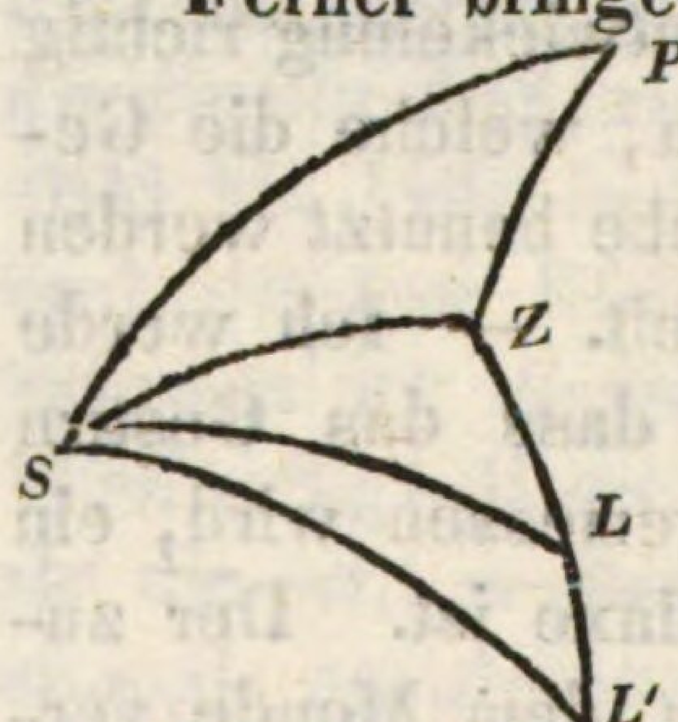
Ich nehme den Mittagsunterschied des Beobachtungsorts und des Meridians der Ephemeride als näherungsweise bekannt an $(= m)$, und suche die aus der Vergleichung der unmittelbar beobachteten Entfernung eines der Mondsränder von dem Sterne $(= D')$ und der Zeit der Beobachtung $(= T)$, mit den Angaben der Ephemeride hervorgehende Verbesserung desselben $(= x)$. Den Mittagsunterschied und seine Verbesserung positiv wenn sie westlich, negativ wenn sie östlich sind, und die Zeitart in welcher T ausgedrückt wird so angenommen wie die Ephemeride sie voraussetzt, suche ich für die Zeit $T+m$, aus der Ephemeride, die wahre Entfernung des Mittelpunkts des Mondes von dem Sterne $(= d)$, berechne daraus die durch die Parallaxe geänderte $(= d')$ und endlich die auch die Refraction einschliessende scheinbare Entfernung des Mondrandes $(= D)$. Diese mit der beobachteten verglichen, ergiebt

die gesuchte Verbesserung des angenommenen Mittagsunterschiedes, nach der Formel

$$x = \frac{D' - D}{n'}$$

in welcher n' die einer Zeitsecunde des Mittagsunterschiedes entsprechende Veränderung von D bedeutet.

Zuerst bemerke ich, dass man die Abplattung der Erde vollständig berücksichtigt, indem man die für den Mittelpunkt der Erde geltenden Angaben der Ephemeride, vor ihrer Anwendung, auf denjenigen Punkt der Erdaxe reducirt, welcher in der Lothlinie des Beobachtungsorts liegt. Ich werde also hier diese Reduction als schon gemacht annehmen, den Punkt auf welchen sie sich bezieht aber, der Kürze wegen, den Punkt O nennen.



Ferner bringe ich die Wirkungen der Parallaxe und der Refraction, voneinander getrennt, die erstere auf folgende Art in Rechnung. Wenn P den Pol, Z das Zenith, S den Stern, L den vom Punkte O gesehenen Ort des Mondes, L' den vom Beobachtungsorte gesehenen bedeuten, so werden die Zenithdistanz $ZS\,(=Z)$ und der parallactische Winkel $PSZ\,(=q)$ des Sterns, aus der Polhöhe $(=\varphi)$, dem Stundenwinkel $(=t)$ und der Declination $(=\varDelta)$ berechnet; für die Zeit $T+m$ werden die Entfernung, der Positionswinkel des Mondes am Sterne, die Aequatoreal-Horizontalparallaxe und der Halbmesser des Mondes aus der Ephemeride genommen und durch d, Q, π, ϱ, nach ihrer Reduction auf den Punkt O aber durch $d_{,}$, $Q_{,}$, $\pi_{,}$, $\varrho_{,}$, bezeichnet; durch $ZS=Z$, $SL=d_{,}$ und den Winkel $ZSL=Q_{,}-q\,(=P_{,})$ werden endlich $SL'=d'$, $ZSL'\,(=P')$ und die Entfernung des Mondes von dem Beobachtungsorte $(=r')$ ausgedrückt. Da der scheinbare Halbmesser des Mondes $(=\varrho')$ durch $\varrho_{,}$ und r' gegeben ist, so erhält man, indem man ihn von d' abzieht oder zu d' hinzufügt, die scheinbare Entfernung des Mondrandes vom Sterne $(=d'')$, so wie sie sein würde wenn keine Refraction vorhanden wäre.

Die Einwirkung der Refraction, durch welche d'' in D verwandelt wird, erhält man durch Z, d'' und P' ausgedrückt, auf eine Art, welche durch die unten vorkommende Entwickelung besser erläutert werden wird, als durch das was ich in diesem Abrisse der Methode darüber

sagen könnte. Über die Berechnung von n' braucht hier gleichfalls nichts gesagt zu werden, da es sich von selbst versteht, dass man sie durch dasjenige Mittel erhalten wird, welches das Verhältniss der zusammengehörigen Veränderungen von m und D am leichtsten ergiebt.

2.

Ich werde nun die einzelnen Theile dieses Abrisses ausführen und mit der *der Ephemeride zu gebenden Einrichtung* anfangen.

Die Ephemeride soll die sich auf den Mittelpunkt der Erde beziehenden d und Q und das zu ihrer Reduction auf die sich auf den Punkt O beziehenden ähnlichen Grössen $d_,$ und $Q_,$ Erforderliche enthalten. Zählt man den Positionswinkel des Mondes am Sterne von Norden durch Osten u. s. w., von 0 bis 360°, so hat man $d_,$ und $Q_,$, durch $\varDelta$, A, $\delta_,$, α folgendermassen ausgedrückt:

$$\cos d_, = \sin\varDelta \sin\delta_, + \cos\varDelta \cos\delta_, \cos(\alpha - A)$$
$$\sin d_, \cos Q_, = \cos\varDelta \sin\delta_, - \sin\varDelta \cos\delta_, \cos(\alpha - A)$$
$$\sin d_, \sin Q_, = \cos\delta_, \sin(\alpha - A)$$

Die Entfernung des Punktes O von dem Mittelpunkte der Erde, welche ich durch $-ai$ bezeichnen werde, ist bekanntlich

$$= \frac{-a\,\varepsilon\varepsilon \sin\varphi}{\sqrt{(1 - \varepsilon\varepsilon \sin\varphi^2)}}$$

wo a den Aequatorealhalbmesser der Erde, ε die Excentricität ihrer Meridiane bezeichnen. Werden die Entfernungen des Mondes vom Mittelpunkte der Erde und vom Punkte O durch r und $r_,$ bezeichnet, so hat man

$$r_, \cos\delta_, = r\cos\delta$$
$$r_, \sin\delta_, = r\sin\delta + ai$$

wodurch die obigen Formeln, wenn man sie in $r_,$ multiplicirt, sich in

$$r_, \cos d_, = r\,[\sin\varDelta \sin\delta + \cos\varDelta \cos\delta \cos(\alpha - A)] + ai \sin\varDelta$$
$$r_, \sin d_, \cos Q_, = r\,[\cos\varDelta \sin\delta - \sin\varDelta \cos\delta \cos(\alpha - A)] + ai \cos\varDelta$$
$$r_, \sin d_, \sin Q_, = r \cos\delta \sin(\alpha - A)$$

verwandeln. Die von i unabhängigen Theile dieser Formeln drücken resp.

$$r\cos d, \quad r\sin d \cos Q, \quad r \sin d \sin Q$$

aus. Wenn man daher die aus:

$$\cos d = \sin\varDelta \sin\delta + \cos\varDelta \cos\delta \cos(\alpha - A)$$
$$\sin d \cos Q = \cos\varDelta \sin\delta - \sin\varDelta \cos\delta \cos(\alpha - A)$$
$$\sin d \sin Q = \cos\delta \sin(\alpha - A)$$

hervorgehenden Werthe von d und Q in die Ephemeride bringt, so erhält man die zur Berechnung der Mondsentfernungen geeigneten, eine fernere Rücksicht auf die Abplattung der Erde unnöthig machenden Werthe von $r_,$, $d_,$, $Q_,$, aus den Formeln:

$$r_, \cos d_, = r \cos d + ai \sin\varDelta$$
$$r_, \sin d_, \cos Q_, = r \sin d \cos Q + ai \cos\varDelta$$
$$r_, \sin d_, \sin Q_, = r \sin d \sin Q$$

welche, wenn man das (wenig bedeutende) Quadrat von i vernachlässigt,

$$r_, = r + ai \sin\delta$$
$$d_, = d - \frac{a}{r} i \,[\sin\varDelta \sin d - \cos\varDelta \cos d \cos Q]$$
$$Q_, = Q - \frac{a}{r} i \,.\, \frac{\cos\varDelta \sin Q}{\sin d}$$

ergeben.

Da die Entfernung des Punktes O vom Beobachtungsorte

$$= \frac{a}{\sqrt{(1 - \varepsilon\varepsilon \sin\varphi^2)}}$$

ist, so hat man

$$\sin\pi_, = \frac{a}{r_, \sqrt{(1 - \varepsilon\varepsilon \sin\varphi^2)}} = \frac{r \sin\pi}{r_, \sqrt{(1 - \varepsilon\varepsilon \sin\varphi^2)}}$$
$$\sin\varrho_, = \frac{r}{r_,} \sin\varrho$$

Damit man $\pi_,$ und $\varrho_,$ durch die π und ϱ enthaltende Ephemeride leicht finden könne, muss diese also auch den Logarithmen von $\frac{r}{r_,}$ leicht angeben. Das erste, allein in Betracht kommende Glied seiner Reihenentwickelung ist:

$$-\ 0{,}43429 \,.\, \varepsilon\varepsilon \sin\pi \sin\delta \,.\, \frac{\sin\varphi}{\sqrt{(1 - \varepsilon\varepsilon \sin\varphi^2)}}$$

wovon die Ephemeride das von φ unabhängige Product enthalten kann.

Die Ephemeride wird daher das Erforderliche enthalten, wenn sie für jede dritte Stunde ergiebt: ($\omega = 206264'',8$)

1) d und den Logarithmen von

$$-\ \omega\, \varepsilon\varepsilon \sin\pi \;[\sin\varDelta \sin d - \cos\varDelta \cos d \cos Q]$$

2) Q und den Logarithmen von

$$-\ \omega\, \varepsilon\varepsilon \sin\pi \,.\, \frac{\cos\varDelta \sin Q}{\sin d}$$

3) Log. sin π und Log. sin ϱ und den Logarithmen von

$$-43429\,\varepsilon\varepsilon\,\sin\pi\,\sin\delta$$

4) Die Rectascension der Sonne weniger der Rectascension des Sterns, so wie auch die Declination des Sterns.

Die Anwendung dieser Ephemeride fordert dann, dass zu den 3 Logarithmen, von welchen die Reduction auf den Punkt O abhängt, der Logarithme von

$$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{[1-\varepsilon\varepsilon\sin\varphi^2)]}}$$

für welchen man ohne wesentlichen Nachtheil $l.\sin\varphi$ nehmen kann, addirt wird; die Summen sind die Logarithmen der Reductionen von d, Q und log. sin ϱ, die letztere in Einheiten der fünften Decimale angegeben. Addirt man auch zu log. sin π die letztere Reduction und überdies den Logarithmen von

$$\frac{1}{\sqrt{[1-\varepsilon\varepsilon\sin\varphi^2)]}}$$

den man aus einer Tafel, deren Argument φ ist, nehmen kann, so erhält man log. sin π, und hiermit *Alles* was man für den Mond gebraucht. Die beiden Angaben 4. sollen die Rechnung für den Stern erleichtern: die erstere derselben zu der Beobachtungszeit T addirt, ergiebt die Entfernung des Sterns von seiner nächstvorhergegangenen Culmination. Sind die Ephemeriden auf wahre Zeit gestellt, so wird die wahre Rectascension der Sonne, sind sie auf mittlere Zeit gestellt die mittlere, zur Berechnung dieser Angabe angewandt.

Von einer so eingerichteten Ephemeride werde ich hier ein Beispiel geben, welches Alles enthält was zur Reduction von Entfernungen des Mondes von α Arietis, welche zwischen der Greenwicher Mitternacht des 2[ten] Juni 1831 und dem darauf folgenden Mittage beobachtet worden sind, erforderlich ist. Die zu der Berechnung dieses Beispiels angewandten Werthe von α, δ, π habe ich aus dem *Nautical-Almanac* interpolirt; den Halbmesser habe ich nach dem *Burckhardt*schen Verhältnisse

$$\sin\varrho = 0{,}2725\,\sin\pi$$

angenommen; den Ort des Sterns nach den *Tabulis Regiomontanis:*

$$A = 29^\circ\,24'\,53'',5;\quad \Delta = +\,22^\circ\,39'\,24'',9;$$

die Abplattung der Erde $= \frac{1}{300}$.

W. Z. in Greenwich.	Entfernung.	Log. Corr.	Positions-winkel.	Log. Corr.	Log. sin Hor. P.	Log. Halbm.	Log. Corr.	Reduction der W. Z.	Declination des Sterns.
Juni 2. 12^h	$62^\circ\ 1'\ 41'',9$	1,084 n	$243^\circ\ 5'\ 14''$	1,324	8,21754	2,96734	9,953	$2^h\ 42'\ 42'',0$	
15	60 28 27,3	1,092 n	242 33 0	1,330	8,21829	2,96808	9,935	43 12,7	
18	58 55 1,5	1,100 n	241 59 38	1,335	8,21905	2,96884	9,916	43 43,4	$+22^\circ\ 39'\ 25''$
21	57 21 24,9	1,108 n	241 25 2	1,341	8,21982	2,96961	9,896	44 14,2	
— 3. 0	55 47 38,2	1,115 n	240 49 5	1,347	8,22060	2,97039	9,873	44 44,9	

Zum Beispiele der Anwendung dieser Ephemeride will ich das zur Berechnung einer am 2. Juni $14^h 24' 10''$ W. Z. in Königsberg gemessenen Entfernung des Mondes von α Arietis Erforderliche suchen. Die Polhöhe ist $54^\circ\ 42'\ 50''$, $l.\sin\varphi = 9{,}912$; den Mittagsunterschied nehme ich $m = -1^h 22' 0''$, also $T + m = 13^h\ 2'\ 10''$. Für diese Zeit giebt die Ephemeride:

$61^\circ\ 29'\ 31'',1$	1,087 n	$242^\circ\ 54'\ 14''$	1,326	8,21780	2,96760	9,947
— 10,0	9,912	+ 17	9,912	+ 1	+ 1	9,912
61 29 21,1	0,999 n	242 54 31	1,238	8,21781	2,96761	9,859

Dem $\log.\frac{r}{r_{,}}\sin\pi$ wird der Log. von

$$\frac{1}{\sqrt{[1-\varepsilon\varepsilon\sin\varphi^2]}}$$

hinzugefügt, welcher aus der erwähnten und am Ende dieser Abhandlung abgedruckten Tafel $= 0{,}00097$ gefunden wird. Man berücksichtigt also die Abplatttung der Erde vollständig, indem man zur Berechnung der Beobachtung anwendet:

$$\begin{aligned} d_{,} &= 61^\circ\ 29'\ 21'',1 \\ Q_{,} &= 242\ 54\ 31 \\ l.\sin\pi_{,} &= 8{,}21878 \\ l.\varrho_{,} &= 2{,}96761 \end{aligned}$$

Die Entfernung des Sterns vom Meridiane ist

$$2^h\ 42'\ 52'',6 + 14^h\ 24'\ 10'',0 = 17^h\ 7'\ 2'',6, \text{ oder } t = 256^\circ\ 45'\ 39''$$

3.

Ich werde nun die *Wirkung der Parallaxe* betrachten. Die Zenithdistanz Z und der parallactische Winkel q des Sterns finden sich aus den Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \cos Z &= \sin\Delta\sin\varphi + \cos\Delta\cos\varphi\cos t \\ \sin Z\cos q &= \cos\Delta\sin\varphi - \sin\Delta\cos\varphi\cos t \\ \sin Z\sin q &= \cos\varphi\ \sin t \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (1^a)$$

oder aus den zur logarithmischen Rechnung eingerichteten:

$$\left.\begin{aligned} a &= \cos\varphi \sin t \\ f\sin F &= \cos\varphi \cos t \qquad \tang Z \cos q = \cotg(F+\Delta) \\ f\cos F &= \sin\varphi \qquad \tang Z \sin q = \tfrac{a}{f}\operatorname{cosec}(F+\Delta) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (1^b)$$

Wenn man die Zenithdistanzen des Mondes, so wie sie von dem Punkte O aus und von dem Beobachtungsorte erscheinen, durch $z_,$ und z', den Azimuthalwinkel zwischen dem Monde und dem Sterne durch E bezeichnet, übrigens aber die im 1ten § gegebenen Bezeichnungen anwendet, so hat man die trigonometrischen Formeln:

$$\begin{aligned} \cos d_, &= \cos Z \cos z_, + \sin Z \sin z_, \cos E \\ \sin d_, \cos P_, &= \sin Z \cos z_, - \cos Z \sin z_, \cos E \\ \sin d_, \sin P_, &= -\sin z_, \sin E \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \cos d' &= \cos Z \cos z' + \sin Z \sin z' \cos E \\ \sin d' \cos P' &= \sin Z \cos z' - \cos Z \sin z' \cos E \\ \sin d' \sin P' &= -\sin z' \sin E \end{aligned}$$

Ferner hat man zwischen $z_,$, z' und r' ($r_, = 1$ angenommen) die Relationen:

$$\begin{aligned} r' \cos z' &= \cos z_, - \sin\pi, \\ r' \sin z' &= \sin z_, \end{aligned}$$

welche, wenn man die letzten Formeln in r' multiplicirt und mit den ersten vergleicht,

$$\begin{aligned} r' \cos d' &= \cos d_, - \sin\pi_, \cos Z \\ r' \sin d' \cos P' &= \sin d_, \cos P_, - \sin\pi_, \sin Z \\ r' \sin d' \sin P' &= \sin d_, \sin P_, \end{aligned}$$

ergeben.

Die hieraus hervorgehenden, folgenden Ausdrücke der unbekannten Grössen:

$$\left.\begin{aligned} r' \cos d' &= \cos d_, - \sin\pi_, \cos Z \\ r' \sin d' \cos(P'-P_,) &= \sin d_, - \sin\pi_, \sin Z \cos P_, \\ r' \sin d' \sin(P'-P_,) &= \sin\pi_, \sin Z \sin P_, \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2^a)$$

empfehlen sich durch ihre Einfachheit, so wie auch durch den Umstand, dass ihre von der Parallaxe unabhängigen Theile, nämlich $\cos d_,$ und $\sin d_,$, keine Rechnung erfordern, sondern unmittelbar aus den nichtlogarithmischen trigonometrischen Tafeln genommen werden.

Zu einer zweiten Umformung gelangt man durch die Einführung eines Hülfswinkels G. Dividirt man nämlich die Summe der aus den beiden letzten der eben gegebenen Formeln hervorgehenden:

$$r' \sin d' \cos(P'-P_,) = \sin d_, - \sin\pi_, \sin Z \cos P_,$$
$$r' \sin d' = \sin d_, \cos(P'-P_,) - \sin\pi_, \sin Z \cos P'$$

durch $1+\cos(P'-P_,)$, so erhält man

$$r' \sin d' = \sin d_, - \sin\pi_, \sin Z \frac{\cos\frac{1}{2}(P'+P_,)}{\cos\frac{1}{2}(P'-P_,)}$$

und wenn man g und G so bestimmt, dass

$$g \sin G = \sin Z \frac{\cos\frac{1}{2}(P'+P_,)}{\cos\frac{1}{2}(P'-P_,)}$$
$$g \cos G = \cos Z$$

sind:

$$r' \cos d' = \cos d_, - g \sin\pi_, \cos G$$
$$r' \sin d' = \sin d_, - g \sin\pi_, \sin G$$

oder

$$r' \cos(d'-G) = \cos(d_,-G) - g \sin\pi_,$$
$$r' \sin(d'-G) = \sin(d_,-G)$$

Durch Division des ersten dieser Ausdrücke durch den zweiten erhält man den Ausdruck von $\operatorname{cotg}(d'-G)$, so wie auch durch Division des obigen Ausdrucks von $r' \sin d' \cos P'$ durch den von $r' \sin d' \sin P'$ den Ausdruck von $\operatorname{cotg} P'$, nämlich:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{cotg} P' &= \operatorname{cotg} P_, - \frac{\sin\pi_, \sin Z}{\sin d_, \sin P_,}\\ \operatorname{cotg}(d'-G) &= \operatorname{cotg}(d_,-G) - \frac{g \sin\pi_,}{\sin(d_,-G)}\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (2^b)$$

Diese Formeln erscheinen noch bequemer als die vorigen und verdienen, wenn man r' nicht kennen zu lernen verlangt, den Vorzug. Sie ergeben, bei gleicher Schärfe der Rechnung, auch ein genaueres Resultat. Rechnet man nach den Formeln (2^a) indem man $\cos d_,$, $\sin d_,$ aus nichtlogarithmischen Tafeln mit 6 richtigen Decimalstellen nimmt und auch im Verfolge der Rechnung Logarithmen mit eben so vielen Decimalstellen anwendet, so kann d' bis auf 0,"502 fehlerhaft werden; wogegen die Rechnung nach den Formeln (2^b), bei welcher Logarithmen nur zur Erfindung der von der Parallaxe abhängigen Grössen angewandt werden, unter der Voraussetzung von Tangententafeln mit 6 richtigen Decimalstellen, die Grenze des Fehlers auf 0,"206 reducirt. Man bemerkt übrigens leicht, dass die Berechnung von P' und aller von der Parallaxe abhängigen Grössen, mit geringerer Genauigkeit geführt werden darf als die Berechnung von d'.

Man kann auch Formeln zur Berechnung der Unterschiede $d'-d_,$ und $P'-P_,$ angeben, sowohl streng richtige, als durch Annäherung zum

Ziele führende; allein ich werde es hier bei den abgeleiteten bewenden lassen und jene mittheilen wo ich sie gebrauchen werde.

Aus r' und $\varrho_{,}$ erhält man

$$\varrho' = \frac{\varrho_{,}}{r'}$$

und damit die scheinbare Entfernung des nächsten oder entferntesten Mondrandes (d'') von dem Sterne:

$$d'' = d' \mp \varrho'$$

4.

Es ist noch nöthig, der Entfernung d'' die *Einwirkung der Strahlenbrechung* hinzuzusetzen.

Aller Schärfe nach genommen ist diese Einwirkung der Unterschied zwischen d'' und dem Bogen eines grössten Kreises, welcher am scheinbaren Orte des Sterns anfängt und sich da endigt, wo er auf dem Rande des (nicht kreisförmig erscheinenden) Mondes normal ist. Man übersieht zwar wohl, dass der Unterschied dieser, die Figur der Scheibe des Mondes berücksichtigenden Einwirkung und der Veränderung der Entfernung d'' durch die Strahlenbrechung, nicht sehr beträchtlich sein könne; allein ohne nähere Erörterung glaube ich ihn nichtsdestoweniger nicht übergehen zu dürfen.

Zuerst werde ich die Veränderung der Entfernung d'' suchen, welche dadurch entsteht, dass die Strahlenbrechung die beiden Punkte erhöhet, zwischen welchen diese Entfernung stattfindet. Der endliche Ausdruck der scheinbaren Entfernung (D) ist bekanntlich:

$$\cos D = \cos(z-r)\cos(Z-R) + \frac{\sin(z-r)\sin(Z-R)}{\sin z \sin Z}(\cos d'' - \cos z \cos Z)$$

worin die wahren Zenithdistanzen des Punkts am Mondrande und des Sterns durch z, Z, die scheinbaren durch $z-r$, $Z-R$ bezeichnet sind. Wenn man die Winkel, welche in dem Dreiecke zwischen dem Scheitelpunkte und den wahren Örtern des Punkts am Mondrande und des Sterns, an den Seiten z und Z anliegen, durch $360°-p'$ und P' bezeichnet, so findet man, durch Entwickelung dieses Ausdruckes bis zu den Quadraten und dem Producte der Refractionen incl.

$$\begin{aligned} D = d'' - r\cos p' - R\cos P' &+ (r\sin p' + R\sin P')^2 \tfrac{1}{4}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}d'' \\ &- (r\sin p' - R\sin P')^2 \tfrac{1}{4}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}d'' \end{aligned}$$

welcher Ausdruck so umgeformt werden kann, dass seine Berechnung wenige Mühe verursacht. Um dieses zu erlangen, führt man, statt der Strahlenbrechungen, zwei Grössen k und K, welche so davon abhängen, dass

$$k = r \operatorname{cotg} z, \qquad K = R \operatorname{cotg} Z$$

ist, in die Rechnung ein und drückt dann z und p' durch Z, P' und d'' aus, was durch die Formeln:

$$\cos z = \cos d'' \cos Z + \sin d'' \sin Z \cos P'$$
$$\sin z \cos p' = \sin d'' \cos Z - \cos d'' \sin Z \cos P'$$
$$\sin z \sin p' = - \sin Z \sin P'$$

geschieht. Bestimmt man einen Hülfswinkel H, nach der Formel

$$\operatorname{tang} H = \operatorname{tang} Z \cos P'$$

so erhält man dadurch:

$$\cos z = \frac{\cos Z}{\cos H} \cos(d'' - H)$$
$$\sin z \cos p' = \frac{\cos Z}{\cos H} \sin(d'' - H)$$
$$\sin z \sin p' = - \sin Z \sin P'$$

und wenn man dieses in dem Ausdrucke von D substituirt:

$$D = d'' - k \operatorname{tgt}(d'' - H) - K \operatorname{tgt} H$$
$$+ \tfrac{1}{4} \operatorname{tgt} Z^2 \sin P'^2 \left[\left(\frac{k \cos H}{\cos(d'' - H)} - K \right)^2 \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} d'' - \left(\frac{k \cos H}{\cos(d'' - H)} + K \right)^2 \operatorname{tgt} \tfrac{1}{2} d'' \right]$$

Die Grössen k, K findet man durch die Formel (Band I. S. 158)

$$\alpha' . \beta^{A'} . \gamma^{\lambda'}$$

deren Bestandtheile die Abtheilung II der Strahlenbrechungstafeln (ebendaselbst S. 198—201) für alle Zenithdistanzen bis 85° angiebt. Von dem zweiten Gliede des Ausdrucks von D, welches man in die Form

$$- \tfrac{1}{4} \left(\frac{\operatorname{tgt} Z \sin P'}{\cos(d'' - H)} \right)^2 \left[kk \sin 2H + KK \sin 2(d'' - H) - 2(k - K)^2 \frac{\cos H \cos(d'' - H)}{\sin d''} \right]$$

bringen kann, kann der in $(k - K)^2$ multiplicirte Theil weggelassen werden. Er ist nämlich

$$\tfrac{1}{2} \frac{\operatorname{tgt} Z^2 \sin P'^2 \cos H}{\sin d'' \cos(d'' - H)} (k - K)^2 = \tfrac{1}{2} \frac{\sin Z^2 \sin P'^2}{\sin d'' \cos z \cos Z} (k - K)^2$$

also kleiner als

$$\frac{\tfrac{1}{2} (k - K)^2}{\sin d'' \cos z \cos Z}$$

welche Grösse, wenn für k der kleinste, für K der grösste der in der Tafel vorkommenden Werthe von α', dennoch aber z und $Z = 85°$

angenommen werden, obgleich beide Annahmen unvereinbar miteinander sind und dennoch vereinigt einen viel zu grossen Werth angeben, nur

$$\frac{0'',019}{\sin d''}$$

ist. Die untersuchte Grösse ist also viel kleiner, wesshalb man

$$D = d'' - k \operatorname{tgt}(d''-H) - K \operatorname{tgt} H$$
$$- \text{Arc.}\, \tfrac{1}{4}'' \left(\frac{\operatorname{tgt} Z \sin P'}{\cos(d''-H)}\right)^2 \left[kk \sin 2H + KK \sin 2(d''-H)\right] \;\ldots\ldots\ldots (3^a)$$

annehmen kann.

Jetzt werde ich die Verbesserung untersuchen, welche aus der am Anfange dieses §'s erwähnten Ursache hervorgeht. Dabei werde ich den Ausdruck der scheinbaren Entfernung des Sterns von dem Punkte des Mondrandes, welcher in der durch den Stern, den Mittelpunkt des Mondes und den Beobachtungsort gehenden Ebene liegt,

$$D = d' \mp \varrho' - r \cos p' - R \cos P'$$

annehmen, indem der an sich sehr kleine Theil der zweiten Ordnung, hier, wo nur ein sehr kleiner Unterschied bestimmt werden soll, ohne merklichen Einfluss ist; auch werde ich nur die erste Potenz von ϱ' in die Rechnung aufnehmen.

Betrachtet man, statt des in der Richtung vom Mittelpunkte des Mondes nach dem Sterne liegenden, einen anderen Punkt des Mondrandes, dessen Radius mit dieser Richtung einen Winkel u macht, und bezeichnet man die für jenen durch D, $d'' = d' \mp \varrho'$, r, p', P' bezeichneten Grössen, für diesen durch (D), (d''), (r), (p'), (P'), so hat man die scheinbare Entfernung dieses Punktes vom Sterne

$$(D) = (d'') - (r)\cos(p') - R\cos(P')$$

Setzt man den in Beziehung auf u genommenen Differentialquotienten dieses Ausdruckes $= 0$, so erhält man die Gleichung, durch welche der Werth von u bestimmt wird, welcher dem Minimo oder Maximo von (D) entspricht; eliminirt man u aus ihr und dem Ausdrucke von (D), so erhält man das Minimum oder Maximum selbst. Man hat nun

$$(d'') = d'' \pm \varrho'(1 - \cos u)$$
$$(z) = z \mp \varrho'[\cos(p'-u) - \cos p']$$
$$(p') = p' \mp \varrho'\left[\frac{\sin p' - \sin(p'-u)}{\operatorname{tgt} z} - \frac{\sin u}{\operatorname{tgt} d''}\right]$$
$$(P') = P' \pm \varrho' \cdot \frac{\sin u}{\sin d''}$$

und aus dem Ausdrucke von (z):

$$(r) = r \mp \varrho' \frac{dr}{dz}\left[\cos(p'-u) - \cos p'\right]$$

Substituirt man dieses in dem Ausdrucke von (D), so erhält man

$$(D) = D \pm \varrho'(1-\cos u)\left[1 - \frac{r\sin p'^2}{\operatorname{tgt} z} - \frac{dr}{dz}\cos p'^2\right]$$

$$\mp \varrho' \sin u \left[r \sin p' \left(\frac{\cos p'}{\operatorname{tgt} z} - \frac{1}{\operatorname{tgt} d''}\right) - R\frac{\sin P'}{\sin d''} - \frac{dr}{dz}\sin p' \cos p'\right]$$

oder kürzer bezeichnet

$$(D) = D \pm \varrho'(1-\cos u)\,a \mp \varrho' \sin u\,.\,b$$

welcher Ausdruck, mit der das Minimum oder Maximum bestimmenden Gleichung:

$$0 = a\sin u - b\cos u$$

verbunden,

$$(D) = D \mp \frac{\varrho' bb}{a + \sqrt{(aa+bb)}}$$

ergiebt.

Setzt man, um diesen Einfluss der Strahlenbrechung völlig zu entwickeln, in dem Ausdrucke von r, nämlich

$$r = k \operatorname{tgt} z$$

k als unveränderlich voraus, was sehr nahe richtig ist, so erhält man

$$\frac{dr}{dz} = k + k \operatorname{tgt} z^2$$

und ferner die durch a und b bezeichneten Quantitäten:

$$a = 1 - k - k \operatorname{tgt} z^2 \cos p'^2$$

$$b = -\frac{\operatorname{tgt} z \sin p'}{\sin d''}\left[k\frac{\cos Z}{\cos z} - K\frac{\cos z}{\cos Z}\right]$$

Wenn man für $\cos z$ und $\cos Z$ die Ausdrücke

$$\cos z = \cos Z \cos d'' + \sin Z \sin d'' \cos P'$$

$$\cos Z = \cos z \cos d'' + \sin z \sin d'' \cos p'$$

schreibt, so verwandelt der Ausdruck von b sich in

$$-\operatorname{tgt} z \sin p' \left[k \operatorname{tgt} z \cos p' - K \operatorname{tgt} Z \cos P' + \frac{k-K}{\operatorname{tgt} d''}\right]$$

wovon man das letzte Glied, als unbedeutend, vernachlässigen kann. Drückt man endlich z und p' durch Z, P' und den oben schon eingeführten Winkel H aus, so erhält man

$$a = 1 - k\sec(d''-H)^2$$

$$b = \frac{\operatorname{tgt} Z \sin P' \cos H}{\cos(d''-H)}\left[k \operatorname{tgt}(d''-H) - K \operatorname{tgt} H\right]$$

und wenn man k für K setzt, was hier nur unerheblichen Fehler verursacht:

$$b = k \operatorname{tgt} Z \sin P' \frac{\sin(d''-2H)}{\cos(d''-H)^2}$$

Da dieser Einfluss für $P'=0$ und für $d''=2H$, oder für die Fälle dass beide Gestirne ein gleiches Azimuth oder eine gleiche Höhe haben, verschwindet, so muss er ein Maximum haben. Der Werth des Winkels p', für welchen dieses stattfindet, ergiebt sich durch Differentiirung des Ausdruckes von b, aus der Gleichung des 4ten Grades:

$$0 = \cos p'^4 + \cos p'^3 \frac{5}{2 \operatorname{tgt} z \operatorname{tgt} d''} - \cos p'^2 \left(\tfrac{1}{2} - \frac{2}{\operatorname{tgt} z^2 \operatorname{tgt} d''^2}\right)$$
$$- \cos p' \frac{2 \operatorname{tgt} z^2 + 1}{\operatorname{tgt} z^3 \operatorname{tgt} d''} - \frac{2 + \operatorname{tgt} d''^2}{\operatorname{tgt} z^2 \operatorname{tgt} d''^2}$$

Aber da der Einfluss nur erheblich werden kann wenn $\operatorname{tang} z$ sehr gross ist, so kann man alle durch $\operatorname{tang} z$ dividirte Glieder der Gleichung ohne merklichen Fehler weglassen, wodurch sie sich auf

$$0 = \cos p'^4 - \tfrac{1}{2} \cos p'^2$$

reducirt. Ihre Wurzeln $\cos p' = 0$ und $\cos p' = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ ergeben die Ausdrücke von b:

die erste $b = \pm k \operatorname{tgt} z \operatorname{tgt} d''$

die zweite . . . $b = \pm \frac{k}{2} \operatorname{tgt} z^2 \left[1 + \dfrac{1 \mp \operatorname{cotg} z . \operatorname{tgt} d'' \sqrt{2}}{1 \pm \dfrac{\operatorname{tgt} z \operatorname{tgt} d''}{\sqrt{2}}}\right]$

Im ersten Falle, in welchem $p' = \pm 90°$ ist, ist z kleiner als Z und

$$\cos z = \frac{\cos Z}{\cos d''},$$

also

$$b = \pm k \sin d'' \sqrt{(\operatorname{tgt} Z^2 - \operatorname{tgt} d''^2)}$$

welcher Ausdruck seinen grössten Werth erlangt wenn $\cos d''^2 = \cos Z$ angenommen wird, nämlich den Werth

$$b = \pm k . \frac{1 - \cos Z}{\cos Z}$$

Im zweiten Falle kann z als die grösste der beiden Zenithdistanzen angenommen werden, wodurch das obere Zeichen von $\cos p'$ bedingt und der zwischen den Klammern befindliche Factor von b für einen grossen Werth von $\operatorname{tang} z$ näherungsweise $= 1$, also b näherungsweise $= \pm \frac{k}{2} \operatorname{tgt} z^2$ wird. — Im ersten Falle beträgt

$$D - (D) = \pm \frac{\varrho' bb}{a + \sqrt{(aa + bb)}}$$

selbst für $Z = 85°$, noch kein Hundertel einer Secunde; im zweiten, für $z = 80°$ gleichfalls kein Hundertel und für $z = 85°$ kein Achtel einer Secunde. Diese Verbesserung kann daher vernachlässigt und die Formel (3^a) als vollständig betrachtet werden.

5.

Nachdem durch die Angaben der Ephemeride und durch die Berechnung der Formeln (1), (2), (3) die scheinbare Entfernung des beobachteten Mondrandes von dem Sterne gefunden ist, bleibt nur noch die im 1[ten] § durch n' bezeichnete, zu einer Änderung des Mittagsunterschiedes (m) von einer Zeitsecunde gehörige Veränderung der scheinbaren Entfernung D aufzusuchen übrig.

Wenn man diese Veränderung geradezu der Veränderung der wahren Entfernung gleichsetzen will, so lässt man dadurch nur den Fehler unverbessert, welcher daraus entstanden ist, dass die Einwirkungen der Parallaxe und Refraction für *den* Ort des Mondes berechnet worden sind, welcher der mit dem vorausgesetzten Mittagsunterschiede auf den Meridian der Ephemeride reducirten Beobachtungszeit zugehört, während diese Einwirkungen für den Mondort hätten berechnet werden sollen, welcher der Beobachtungszeit und dem durch die Beobachtung selbst berichtigten Mittagsunterschiedes entspricht. Dieser Fehler beträgt immer nur einen kleinen Theil der gesuchten Verbesserung des Mittagsunterschiedes. Die folgende Differentiirung der scheinbaren Entfernung wird das Mittel ihn zu vermeiden ergeben; denn die Bewegung des Mondes ist so langsam, dass selbst wenn der vorausgesetzte Mittagsunterschied 10 oder 20 Zeitminuten fehlerhaft sein sollte, die von dem Quadrate der Bewegung abhängige Verbesserung noch nicht erheblich werden kann.

Indem die, einer kleinen Änderung des Mondorts entsprechenden Änderungen des immer sehr kleinen Einflusses des Quadrats der Refraction, so wie auch der Grösse k unbedeutend sind, ist der Ausdruck der scheinbaren Entfernung:

$$D = d'' - k \tang(d'' - H) - K \tang H$$

nur in Beziehung auf d'' und H zu differentiiren. Man erhält dadurch

$$\frac{dD}{dm} = \frac{dd''}{dm}\left[1 - k \sec(d'' - H)^2\right]$$
$$+ \frac{dH}{dm}\left[k \sec(d'' - H)^2 - K \sec H^2\right]$$

und da

$$\operatorname{tang} H = \operatorname{tang} Z \cos P'$$

also H nur mit P' veränderlich ist,

$$\frac{dD}{dm} = \frac{dd''}{dm}\left[1 - k\sec(d''-H)^2\right]$$
$$- \frac{dP'}{dm}\operatorname{tang} Z \sin P'\left[\frac{k\cos H^2}{\cos(d''-H)^2} - K\right]$$

Um die Ausdrücke der Differentialquotienten von d'' und P' zu erhalten, muss man die Formeln (2) differentiiren; es ist dabei zu bemerken, dass diese Formeln, wenn man $d_{,} \mp \varrho_{,}$ statt $d_{,}$ setzt, fast genau d'' statt d' ergeben, so dass man, durch diese Änderung auch die Veränderlichkeit des scheinbaren Mondhalbmessers berücksichtigt. Diese Differentiation ergiebt (d statt $d_{,} \mp \varrho_{,}$ geschrieben)

$$r'\frac{dd''}{dm} = [\sin d \sin d'' + \cos d \cos d'' \cos(P'-P_{,})]\frac{dd}{dm}$$
$$+ \sin d \cos d'' \sin(P'-P_{,})\frac{dQ_{,}}{dm}$$
$$r' \sin d''\frac{dP'}{dm} = -\cos d \sin(P'-P_{,})\frac{dd}{dm} + \sin d \cos(P'-P_{,})\frac{dQ_{,}}{dm}$$

Will man aber im Ausdrucke von n' Alles weglassen, was in das Quadrat der Mondsparallaxe und in ihr Product in die Strahlenbrechung multiplicirt ist, so hat man, statt der eben gegebenen richtigen Ausdrücke, die genäherten:

$$r'\frac{dd''}{dm} = \frac{dd}{dm} + \frac{dQ_{,}}{dm}\sin\pi_{,} \sin Z \sin P' \cos d$$
$$\frac{dP'}{dm} = \frac{dQ_{,}}{dm}$$

und die Anwendung der letzteren statt der ersteren wird eben so wenig einen erheblichen Fehler erzeugen, als die Verwechselung von k mit K. Auf diese Art erhält man:

$$n' = \frac{n}{r'}\left[1 + \frac{dQ_{,}}{dd}\alpha\cos d - \frac{k\,\text{Arc.}\,1''.(1+\beta)}{\cos(d''-H)^2}\right] \ldots\ldots\ldots (4)$$

wo α und β, um abzukürzen, für

$$\sin\pi_{,} \sin Z \sin P_{,}$$
$$\frac{dQ_{,}}{dd}\operatorname{tang} Z \sin P_{,} \sin d'' \sin(d''-2H)$$

geschrieben sind. — In den meisten Fällen wird schon der Ausdruck

$$n' = \frac{n}{r'}\left(1 - \frac{k\,\text{Arc.}\,1''}{\cos(d''-H)^2}\right)$$

eine hinreichende Annäherung gewähren, denn die daraus weggelassenen,

der Veränderung des Positionswinkels proportionalen Glieder sind immer beträchtlich kleiner als die beibehaltenen und werden dieses destomehr, je vortheilhafter die Sterne ausgewählt sind, d. h. je näher sie in der Richtung der Bewegung des Mondes liegen.

Bei dieser Gelegenheit erwähne ich des besonderen Falles welchen die Methode der Mondsentfernungen darbieten kann, nämlich dass die scheinbare Entfernung bis zu einem Maximo wächst und dann wieder abnimmt, also während einiger Zeit ohne merkliche Änderung bleibt. Dieses kann sich ereignen wenn das Gestirn, dessen Entfernung vom Monde gemessen wird, dem Untergange zugeht, der Mond aber sehr hoch steht; einen vorgekommenen Fall dieser Art hat Herr *Rümker* (Astr. Nachr. № 5.) angeführt. — Der eben entwickelte Ausdruck von n' lässt keinen Zweifel darüber, dass der Mittagsunterschied in diesem Falle eben so gut bestimmt wird als in jedem anderen; da dieses aber auch ohne Rechnung klar wird, so erwähne ich des Falles nicht sowohl um ihn aufzuklären, als um zu bemerken, dass die Beobachtung eines solchen Maximums allein, *ohne Zuziehung der Zeitbestimmung*, den Mittagsunterschied ergiebt. In Fällen wo die Zeitbestimmung nicht sicher ist, wird ihr Fehler desto weniger nachtheilig, je langsamer die scheinbare Entfernung sich ändert.

6.

Nachdem ich den einfacheren Fall der Aufgabe vollständig abgehandelt habe, muss ich noch den zusammengesetzteren betrachten, den Fall nämlich, in welchem auch das Gestirn mit welchem der Mond verglichen wird, eine Parallaxe und einen Halbmesser zeigt. Ich werde dieses Gestirn hier *die Sonne* nennen, wenn auch das Meiste von dem, was ich darüber zu sagen habe, ebensowohl für die Planeten gilt.

Von welchem Punkte des Raumes man auch die Sonne und den Mond sehen möge, so liegen die Örter derselben und der von dem Monde gesehene Ort der Sonne in einem grössten Kreise der Himmelskugel. Den die Richtung vom Monde nach der Sonne bezeichnenden Punkt der Himmelskugel kann man offenbar als den Fixstern ansehen, auf welchen alles Vorige sich bezieht; man kann also die durch die Parallaxe veränderten Entfernungen *beider* Gestirne von diesem Punkte nach der gegebenen Vorschrift berechnen und durch den Unterschied derselben die

Entfernung des einen von dem anderen ausdrücken. — Auf diese Art wird der zusammengesetztere Fall auf den einfacheren reducirt; der Punkt der Himmelskugel aber, durch welchen dieses erlangt wird, ist derselbe, dessen Einführung in die Betrachtung, wie ich (Abhandl. X.) gezeigt habe, auch die Theorie der Finsternisse auf ihre einfachste Gestalt zurückführt. Ich werde ihn, wie dort, den Punkt Z nennen.

Ich werde die Rectascension, Declination und Entfernung des Mondes α, δ, r; der Sonne A, $\varDelta$, R bezeichnen; die Entfernungen an der Himmelskugel zwischen dem Punkte Z und dem Monde und der Sonne $d+e$ und e. Diese Zeichen gelten für den Mittelpunkt der Erde; sie werden mit einem Comma versehen (z. B. $d_, + e_,$, $e_,$) wenn sie sich auf den Punkt O (§ 2.), mit einem Accente (z. B. $d'+e'$, e') wenn sie sich auf den Beobachtungsort beziehen. Die Rectascension und Declination des Punkts Z bezeichne ich durch A^0 und $\varDelta^0$, die Entfernung des Mondes von der Sonne durch R^0.

Nach diesen Bezeichnungen werden, in den Formeln (1) des 3ten §, für t und $\varDelta$ die sich auf den Punkt Z beziehenden Werthe, nämlich der der Rectascension A^0 zugehörige Stundenwinkel und die Declination $\varDelta^0$ gesetzt. Die Formeln (2^a), welche man nun ebensowohl für den Mond als für die Sonne anzuwenden hat, werden für den Mond:

$$\begin{aligned} r'\cos(d'+e') &= \cos(d_,+e_,) - \sin\pi_, \cos Z \\ r'\sin(d'+e')\cos(P'-P_,) &= \sin(d_,+e_,) - \sin\pi_, \sin Z \cos P_, \\ r'\sin(d'+e')\sin(P'-P_,) &= \qquad\qquad \sin\pi_, \sin Z \sin P_, \end{aligned}$$

und für die Sonne

$$\begin{aligned} R'\cos e' &= \cos e_, - \sin\pi'_, \cos Z \\ R'\sin e'\cos(P'-P_,) &= \sin e_, - \sin\pi'_, \sin Z \cos P_, \\ R'\sin e'\sin(P'-P_,) &= \qquad\qquad \sin\pi'_, \sin Z \sin P_, \end{aligned}$$

Allein es ist nicht nöthig, die letzteren wirklich unter dieser Form zu berechnen, indem man durch Division derselben durch die ersteren:

$$\frac{R'\sin e'}{r'\sin(d'+e')} = \frac{\sin\pi'_,}{\sin\pi_,} = \frac{\sin e_, - \sin\pi'_, \sin Z \cos P_,}{\sin(d_,+e_,) - \sin\pi' \sin Z \cos P_,}$$

hat, woraus die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin e_, \sin\pi_, &= \sin(d_,+e_,)\sin\pi'_, \\ R'\sin e' \sin\pi_, &= r'\sin(d'+e')\sin\pi'_, \end{aligned}$$

hervorgehen, welche, verglichen mit der ersten Formel für beide Gestirne,

$$R' \cos e' = \frac{\sin d_, + r' \cos(d'+e') \sin e_,}{\sin(d_,+e_,)}$$

$$R' \sin e' = \frac{r' \sin(d'+e') \sin e_,}{\sin(d_,+e_,)}$$

ergeben. Eine zweite, gleichfalls einfache Formel zur Bestimmung von e', nämlich

$$R' \sin e' = \frac{\sin P_,}{\sin P'} \sin e_,$$

erhält man wenn man den aus der Verbindung der beiden letzten Gleichungen folgenden Ausdruck

$$\sin e_, \sin(P'-P_,) = \sin \pi'_, \sin Z \sin P'$$

mit der letzten Gleichung vergleicht.

Nachdem hierdurch die Vorschrift zur Erfindung der scheinbaren Entfernung d' gegeben ist, kommt es noch darauf an, die Werthe von A°, Δ° und $e_,$, welche dieselbe voraussetzt, zu bestimmen. Diese Bestimmung gründet sich auf die Gleichungen:

$$R^\circ \cos\Delta^\circ \cos A^\circ = R \cos\Delta \cos A - r \cos\delta \cos\alpha$$
$$R^\circ \cos\Delta^\circ \sin A^\circ = R \cos\Delta \sin A - r \cos\delta \sin\alpha$$
$$R^\circ \sin\Delta^\circ = R \sin\Delta - r \sin\delta$$

oder, wenn man R zur Einheit annimmt,

$$R^\circ \cos\Delta^\circ \cos A^\circ = \cos\Delta \cos A - m \cos\delta \cos\alpha$$
$$R^\circ \cos\Delta^\circ \sin A^\circ = \cos\Delta \sin A - m \cos\delta \sin\alpha$$
$$R^\circ \sin\Delta^\circ = \sin\Delta - m \sin\delta$$

wo m für

$$\frac{\sin \pi'}{\sin \pi}$$

geschrieben ist. Wenn man die hieraus hervorgehenden Werthe von Δ° und A°, statt Δ und A in die Formeln setzt, durch welche im 2ten § d und Q ausgedrückt sind, so ergeben dieselben Formeln nun $d+e$ und Q, und die oben gefundene Gleichung zwischen $e_,$ und $d_,+e_,$, oder vielmehr die ähnliche, auf den Mittelpunkt der Erde bezogene, giebt:

$$\sin e = m \sin(d+e)$$

Hierdurch ist alles Erforderliche geleistet. Allein da es einerseits ein Interesse hat, die Kleinheit von m zur Ableitung bequemerer Rechnungsvorschriften zu benutzen, andrerseits aber gewünscht werden muss, die Entfernung d, wegen ihres unmittelbaren Einflusses auf das Resultat,

in möglichst grosser Schärfe aus der Rechnung hervorgehen zu sehen, so ist es zweckmässiger, zuerst d und den Positionswinkel des Mondes am Mittelpunkte der Sonne, welchen ich durch ψ bezeichnen werde, durch die trigonometrischen Formeln zu berechnen, und dann e, Q, A^0, $\varDelta^0$ nach den Näherungsformeln. Man rechnet also zuerst nach den Formeln:

$$\cos d = \sin\varDelta \sin\delta + \cos\varDelta \cos\delta \cos(\alpha - A)$$
$$\sin d \cos\psi = \cos\varDelta \sin\delta - \sin\varDelta \cos\delta \cos(\alpha - A)$$
$$\sin d \sin\psi = \cos\delta \sin(\alpha - A)$$

und wendet dann die Näherungen

$$e = \frac{\pi'}{\sin\pi} \sin d$$
$$Q = \psi - e \sin\psi \operatorname{tg}\varDelta$$
$$A^0 = A - e \sin\psi \sec\varDelta$$
$$\varDelta^0 = \varDelta - e \cos\psi$$

an.

Die Reduction von $d+e$ und Q auf den Punkt O, und den Werth von $\log.\frac{r}{r_{,}}$ findet man wie im 2ten §, indem man nämlich

$$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{[1-\varepsilon\varepsilon \sin\varphi^2)]}}$$

resp. in

$$-\ \omega\,.\,\varepsilon\varepsilon \sin\pi\ [\sin\varDelta^0 \sin(d+e) - \cos\varDelta^0 \cos(d+e) \cos Q]$$
$$-\ \omega\,.\,\varepsilon\varepsilon \sin\pi\,.\,\frac{\cos\varDelta^0 \sin Q}{\sin(d+e)}$$
$$-\ 43429\,.\,\varepsilon\varepsilon \sin\pi \sin\delta$$

multiplicirt. Der Vollständigkeit wegen bemerke ich, dass der Factor für die ähnliche Reduction von e sich in

$$\omega\,.\,\varepsilon\varepsilon \sin\pi'.\cos\varDelta \cos\psi$$

zusammenzieht und der von $\log\frac{R}{R_{,}}$

$$-\ 43429\ \varepsilon\varepsilon \sin\pi' \sin\varDelta$$

wird. Die aus dem ersten entstehende Reduction beträgt aber nie mehr als einige Hundertel einer Secunde, der Einfluss des letzten ist noch kleiner, wesshalb ich von beiden keinen Gebrauch machen werde.

Die *Ephemeride* muss, für die Entfernungen des Mondes von der Sonne, eine Columne mehr besitzen als für die Entfernungen von Fixsternen, nämlich die Columne für den *Ergänzungsbogen e*. Die *Reduction der wahren Zeit*, oder $A-A^0$ beträgt hier immer weniger als eine Zeitminute. Von diesem Falle der Ephemeride gebe ich hier gleichfalls ein

Beispiel. Es gilt für denselben Zeitraum, für welchen ich im 2[ten] § gerechnet habe und beruhet auf folgenden, aus dem *Nautical-Almanac* entlehnten Angaben für den Mond und die Sonne:

	α	δ	π	A	$\varDelta$	π'
h	° ′ ″	° ′ ″	′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″
Juni 2.12	336 6 24,00	— 10 50 58,00	56 44,00	70 5 23,25	+22 11 48,94	8,45
15	337 41 26,98	— 10 23 17,86	56 49,86	70 13 4,14	12 47,28	8,45
18	339 16 32,62	— 9 55 4,00	56 55,81	70 20 45,15	13 45,23	8,45
21	340 51 41,70	— 9 26 17,38	57 1,86	70 28 26,27	14 42,80	8,85
— 3. 0	342 26 55,00	— 8 56 59,00	57 8,00	70 36 7,50	15 40,00	8,45

Die Ephemeride ist folgende:

W. Z. in Greenwich.	Entfernung.	Log. Corr.	Positionswinkel.	Log. Corr.	Log. sin Hor. P.	Log. Halbm.	Log. Corr.	Reduct. d. W. Z.	Verbess. Decl. d. Sonne.	Ergänzbogen.
h	° ′ ″		° ′ ″					″	° ′ ″	′ ″
Juni 2.12	97 43 0,4	0,906 n	261 26 16	1,321	8,21754	2,96734	9,953	—36,1	+22 13 5	8 27,4
15	96 13 6,2	0,913 n	261 20 50	1,320	8,21829	2,96808	9,935	—36,2	14 4	8 28,2
18	94 42 51,8	0,919 n	261 15 24	1,320	8,21905	2,96884	9,916	—36,2	15 3	8 28,6
21	93 12 16,7	0,926 n	261 10 0	1,319	8,21982	2,96961	9,896	—36,2	16 1	8 28,6
3. 0	91 41 20,7	0,931 n	261 4 36	1,319	8,22060	2,97039	9,872	—36,2	16 59	8 28,2

Wenn man eine Ephemeride von dieser Einrichtung besitzt, so unterscheiden sich die Berechnungen der durch die Parallaxe veränderten Entfernung d', für einen Fixstern und für die Sonne, nur darin, dass in dem letzteren Falle die aus der Ephemeride genommene Entfernung, vor ihrer Anwendung, um den Ergänzungsbogen vergrössert, und von dem, dadurch nach einer der Vorschriften des §. 3. erlangten Werthe von $d'+e'$, e' abgezogen wird, welches man aus einer der oben gegebenen Formeln:

$$e' = \frac{r' \sin(d'+e')}{\sin(d_,+e_,)} \quad e_, = \frac{\sin P_,}{\sin P'} e,$$

findet. Wenn man die Vergrösserung des Sonnenhalbmessers nicht berücksichtigen will, ist die Aufsuchung von R' unnöthig.

Die Berechnung der Einwirkung der Strahlenbrechung erleidet in dem hier betrachteten Falle auch eine kleine Änderung. Es wird nämlich stets die Entfernung der nächsten Ränder des Mondes und der Sonne gemessen, deren Entfernungen von dem Punkte Z resp. $d'+e'-\varrho'$ und $h+e'$ sind (h = Halbmesser der Sonne): die Formel (3[a]) wäre daher auf diese *beiden* Entfernungen anzuwenden. Allein aus dem im 4[ten] § über den Einfluss der Mondsscheibe auf die Strahlenbrechung Gesagten, geht hervor, dass dieser Einfluss auf die Entfernung der nächsten Ränder

des Mondes und der Sonne, von dem Unterschiede der Einflüsse auf beide Entfernungen $d' + e' - \varrho'$ und $h + e'$ nicht merklich verschieden, dass also dieser Unterschied geradezu das Gesuchte ist. Bezeichnet man den zu dem beobachteten Punkte des Sonnenrandes gehörigen Werth von K durch K', und $d' - \varrho' - h$ durch d'', so erhält man, wie im 4ten §:

$$D = d'' - k \operatorname{tgt}(d'' + e' + h - H) - K' \operatorname{tgt}(H - e' - h)$$
$$- \text{Arc.} \tfrac{1}{4}'' \left[\frac{\operatorname{tgt} Z \sin P' \cos H}{\cos(d'' + e' + h - H)\cos(H - e' - h)}\right]^2 \left[kk \sin 2(H - e' - h) + K'K' \sin 2(d'' + e' + h - H)\right] \quad (3^b)$$

Der hier vorkommende Werth von K' gehört zu der wahren Zenithdistanz des beobachteten Punkts am Sonnenrande, deren Cosinus den Ausdruck:

$$\cos Z \cos(h + e') + \sin Z \sin(h + e') \cos P'$$

hat, oder welche, mit hinreichender Annäherung

$$Z - (h + e') \cos P'$$

ist.

7.

Die Berechnung beobachteter Entfernungen des Mondes von den *Planeten* ist der im vorigen § auf die Sonne bezogenen ganz gleich und darf daher nicht besonders abgehandelt werden. Jedoch erfordert die theilweise Erleuchtung der Planeten, dass die sich auf Venus und Mars beziehenden Ephemeriden nicht für ihre Mittelpunkte berechnet werden. Die Fernröhre der Reflexions-Instrumente sind nämlich meistens zu schwach um die theilweise erleuchtete Figur so deutlich zu zeigen, dass ein bestimmter Theil, namentlich der erleuchtete Rand derselben, gehörig unterschieden und mit dem erleuchteten Mondrande durch Reflexion in Berührung gebracht werden könnte. Vielmehr zeigen diese Fernröhre nur ein *unförmliches* Licht, und man kann mit ihnen nichts anderes beobachten, als die Entfernung eines Punktes, dessen man sich nicht deutlich bewusst ist, von dem Mondrande. Es entsteht daher die Frage, *welcher* Punkt der Planetenscheibe, statt des Mittelpunkts derselben, der Berechnung der Ephemeride zum Grunde gelegt werden müsse? —

Meiner Meinung nach sollte dieses der *Schwerpunkt* des erleuchteten Theils der Planetenscheibe sein; denn wenn dieser, durch Reflexion auf den Mondrand gebracht ist, scheint das Licht innerhalb und ausserhalb der Mondscheibe einen gleich starken Eindruck auf das Auge machen zu müssen. Ich werde daher hier die Formeln angeben, durch welche

die Rectascension und Declination dieses Schwerpunkts berechnet werden können.

Die Rectascension und Declination des Planeten bezeichne ich durch A und $\varDelta$, des gesuchten Schwerpunkts seines erleuchteten Theils durch A' und $\varDelta'$, der Sonne durch a und d; ferner den Winkel am Planeten durch u, an der Erde durch v; die Entfernungen des Planeten von der Sonne und Erde durch r und r', der Erde von der Sonne durch R; den Positionswinkel der Sonne am Planeten durch p; den Winkel unter welchem der Halbmesser des Planeten in der Entfernung $=1$ erscheint durch h. Nach diesen Bezeichnungen hat man ($\pi = 3{,}141\ldots$)

$$A' = A - \frac{8h}{3\pi r'} \sin \tfrac{1}{2}u^2 \sin p \sec \varDelta$$
$$\varDelta' = \varDelta + \frac{8h}{3\pi r'} \sin \tfrac{1}{2}u^2 \cos p$$

Die hier vorkommenden u und p werden aus den Formeln

$$\cos v = \sin d \sin \varDelta + \cos d \cos \varDelta \cos(A-a)$$
$$\sin v \cos p = \sin d \cos \varDelta - \cos d \sin \varDelta \cos(A-a)$$
$$\sin v \sin p = \cos d \sin(A-a)$$

und

$$r \cos u = r' - R \cos v$$
$$r \sin u = R \sin v$$

gefunden.

Übrigens glaube ich, dass, der Aufnahme der *Venus* unter die Gestirne, deren Entfernung vom Monde in den Ephemeriden vorausberechnet wird, die auf zahlreiche Beobachtungen mit gewöhnlichen, zum deutlichen Sehen der erleuchteten Figur unzureichenden See-Instrumenten gegründete Untersuchung hätte vorangehen sollen, inwiefern die unvollständige Beleuchtung dieses Planeten die Genauigkeit des verlangten Resultats beeinträchtigt. So wie unsere Planetentafeln jetzt beschaffen sind, verheissen indessen, auch abgesehen von dem eben erwähnten Umstande, die Vergleichungen des Mondes mit den aus ihnen berechneten Örtern, weniger genaue Resultate als seine Vergleichungen mit Fixsternen und der Sonne.

8.

Ich kehre nun zu der Berechnungsart der gemessenen Entfernungen des Mondes von anderen Gestirnen zurück. In dem Vorhergehenden habe ich sie so entwickelt, dass sie zum Ziele führt, d. h. den, einer

Beobachtung wirklich entsprechenden Mittagsunterschied ergiebt. Um dieses zu erlangen, habe ich auch Umstände berücksichtigt, welche, wenn nichtsowohl eine vollständige Theorie der Erscheinung, als das Mittel gesucht wird, aus gemachten Beobachtungen Nutzen zu ziehen, unberücksichtigt bleiben können, indem ihr Einfluss auf das Resultat *weit kleiner* ist als der unvermeidliche Fehler jeder Messungsreihe von Entfernungen; so dass beide zusammen die dem letzteren allein entsprechende Wahrscheinlichkeit eines Fehlers nur unbedeutend vergrösseren. — Dahin gehören die Reductionen des Positionswinkels, der Horizontalparallaxe und des Horizontalhalbmessers auf den Punkt O, zu deren Erlangung die (§. 2 und 6.) mitgetheilten Proben einer Ephemeride besondere Columnen enthalten. Unterlässt man diese Reductionen, so begeht man Fehler, welche aber, wegen der ersten, die scheinbare Entfernung (für $\pi = 57' 30''$) stets um weniger als

$$0{,}''38 \sin\varphi \frac{\sin z \sin p'}{\operatorname{tgt} d}$$

und wegen der letzten die Horizontalparallaxe und den Halbmesser um weniger als

$$0{,}''18 \sin\varphi \quad \text{und} \quad 0{,}''05 \sin\varphi$$

ändern. Man erspart dadurch die zweite und dritte der, dieser Reductionen wegen der Ephemeride hinzugefügten Columnen, und die Berücksichtigung der Abplattung der Erde zieht sich auf die Anwendung der *ersten* dieser Columnen und die Addition des aus der Tafel zu entnehmenden Logarithmen zu $l.\sin\pi$ zusammen. — Ferner gehört hieher das Glied zweiter Ordnung der für den Einfluss der Strahlenbrechung entwickelten Formel (3): dieses Glied verschwindet wenn beide Gestirne gleiches Azimuth, und wird am grössten wenn sie gleiche Zenithdistanz haben, in welchem Falle sein Ausdruck:

$$-\frac{kk}{\omega} \operatorname{tgt} Z^2 \operatorname{tgt} \tfrac{1}{2} d'' + \frac{kk}{\omega} \operatorname{tgt} \tfrac{1}{2} d''^3$$

und sein Werth für verschiedene Zenithdistanzen

60°	$-0{,}''048 \operatorname{tgt} \frac{1}{2} d''$	$+0{,}''016 \operatorname{tgt} \frac{1}{2} d''^3$
65.	$-0{,}073$	$+0{,}016$
70.	$-0{,}119$	$+0{,}016$
75.	$-0{,}216$	$+0{,}016$
80.	$-0{,}477$	$+0{,}015$
85.	$-1{,}584$	$+0{,}012$

wird. Man sieht hieraus, dass dieses Glied erst in Zenithdistanzen einigermassen merklich werden kann, in welchen der Mondrand, wegen seiner Nähe am Horizonte, schon seine scharfe Begrenzung verloren hat; es ist auch stets kleiner als die durch die meteorologischen Instrumente *nicht* erkennbaren Änderungen der Strahlenbrechung, welche den grössten Einfluss auf die Entfernung erhalten wenn dieses Glied verschwindet. — Endlich bemerke ich, dass die Zahl n', zu deren Berechnung der 5ten § die Anweisung ertheilt, mit desto geringerer Genauigkeit gesucht werden darf, je näher die berechnete scheinbare Entfernung der beobachteten kömmt, oder je kleiner der Fehler des vorausgesetzten Mittagsunterschiedes ist: nimmt man geradezu n, die Veränderung der *wahren* Entfernung, dafür an, so wird der daraus entstehende Fehler selten den sechszigsten, nie den dreissigsten Theil der aus der Beobachtung hervorgehenden Verbesserung des Mittagsunterschiedes betragen. Die Abkürzung des Ausdruckes, nämlich:

$$n' = \frac{n}{r'}\left[1 - \frac{k \text{ Arc. } 1''}{\cos(d''-H)^2}\right]$$

oder auch

$$n' = n\left[1 + \sin\pi, \cos z - \frac{k \text{ Arc. } 1''}{\cos(d''-H)^2}\right]$$

führt der Wahrheit in allen Fällen weit näher, und ich glaube nicht, dass es ein Interesse haben kann über diesen Ausdruck hinauszugehen. Indem die älteren Methoden nicht vorschreiben, den Ort des Mondes der der Berechnung seiner Zenithdistanz zum Grunde liegt, nach der Berichtigung des angenommenen Mittagsunterschiedes noch einmal zu suchen und damit die Rechnung zu wiederholen, begehen sie genau denselben Fehler, welchen die Voraussetzung $n' = n$ verursachen würde.

9.

Die Rechnung kann noch durch eine Änderung der Ephemeride etwas abgekürzt werden. Es ist offenbar fast gleichgültig, ob die durch die Parallaxe veränderte Entfernung des Mondmittelpunkts von dem anderen Gestirne, aus der wahren berechnet und dann, um die Entfernung des Randes zu erhalten, um den scheinbaren Halbmesser des Mondes vermindert oder vermehrt wird, oder ob der Halbmesser des Mondes am Anfange berücksichtigt, also die der wahren, um den wahren Halbmesser

des Mondes verminderten oder vermehrten Entfernung entsprechende scheinbare Entfernung aufgesucht wird. Richtig ist das letztere nicht, weil der Punkt der Mondsoberfläche, welcher von dem Mittelpunkte der Erde gesehen in dem grössten Kreise nach dem Sterne und am Rande des Mondes liegt, von dem Beobachtungsorte gesehen weder in der Richtung nach dem Sterne, noch am Rande erscheint. Allein die Entfernung dieses Punktes von dem am Beobachtungsorte in der Richtung nach dem Sterne, am Rande erscheinenden, ist im Sinne der Entfernung stets kleiner als

$$0'',15\,\frac{\sin z^2}{\sin d^2}$$

und in der darauf senkrechten Richtung etwa

$$= 15'',7\,\frac{\sin z \sin p'}{\operatorname{tgt} d},$$

und diese letzte Entfernung erhält nur dadurch Einfluss, dass die Strahlenbrechung für den Mond für einen Punkt in Rechnung gebracht wird, welcher von dem Punkte für welchen sie in Rechnung gebracht werden sollte, diese kleine Entfernung besitzt. Da bei den Anwendungen der Mondsmethode Entfernungen von weniger als 30° meistens vermieden werden und gewöhnlich weit grössere vorkommen, so ist der durch die Verwechselung der beiden Punkte verursachte Verlust an Genauigkeit nie beträchtlich und meistens ganz unbedeutend.

Dieser Änderung zufolge bedeutet nun, in den Formeln des 3ten §'s, d, die schon um den Halbmesser ϱ, verminderte oder vermehrte Entfernung für den Punkt O, und d' die scheinbare Entfernung des Mondrandes von dem Sterne. Man kann die erstere unmittelbar in der Ephemeride angeben, nämlich durch Columnen für

$$d \mp \varrho$$

und $-\omega . \varepsilon\varepsilon \sin\pi\ [\sin\varDelta \sin(d\mp\varrho) - \cos\varDelta \cos(d\mp\varrho)\cos Q]$

wodurch denn sowohl die Angabe des Mondhalbmessers als seine Berücksichtigung in der Rechnung gänzlich wegfällt.

Die auf diese Art abgeänderte Probe der Ephemeride (§. 2) lasse ich hier folgen. Der Columne für die Entfernung habe ich noch den Logarithmen ihrer Veränderung in einer Secunde (n) beigesetzt. Dieser wird nicht allein am Ende der Rechnung gebraucht, sondern er kann auch am Anfange derselben, zur möglichst leichten Erfindung der Entfernung

für die auf den Meridian der Ephemeride reducirte Beobachtungszeit benutzt werden: man sucht ihn nämlich für diese Zeit und fügt die halbe Summe desselben und des in der Ephemeride enthaltenen unmittelbar vorhergehenden, ähnlichen Logarithmen, zu dem Logarithmen der Zeit, von der vorhergehenden Zeit der Ephemeride angerechnet, wodurch man den Logarithmen der Veränderung der Entfernung, mit Rücksicht auf die zweite Differenz, erhält.

Entfernung α Arietis vom nächsten Mondrande.

W. Z. in Greenwich.	Entfernnng.	Log. Veränd. für 1″	Log. Corr.	Positions-winkel.	Log. sin Hor. P.	Reduction der W. Z.	Declination des Sterns.
h	° ′ ″			° ′ ″		h ′ ″	
Juni 2. 12	62 46 14,4	9,71401	1,085 n	243 5 14	8,21754	2 42 42,0	
15	60 12 58,2	9,71491	1,093 n	242 33 0	8,21829	43 12,7	
18	58 39 30,7	9,71576	1,101 n	241 59 38	8,21905	43 43,4	+22° 39′ 25″
21	57 5 52,5	9,71657	1,108 n	241 25 2	8,21982	44 14,2	
— 3. 0	55 32 4,1	9,71734	1,116 n	240 49 5	8,22060	44 44,9	

Für die Entfernungen des Mondes von der Sonne (oder einem Planeten) kann der Ephemeride dieselbe Einrichtung gegeben werden, so dass sie unmittelbar die geocentrische Entfernung der Ränder enthält. Dadurch wird nöthig, dass der Punkt Z (§. 6) nicht auf den Mittelpunkt der Sonne, sondern auf den Punkt ihres Randes bezogen werde, welcher in der Richtung von ihrem Mittelpunkte nach dem Monde liegt; oder dass man, nachdem d und ψ den Formeln des 6ten §'s gemäss berechnet worden sind, zur Erfindung von e, Q, A°, Δ° die Näherungsformeln:

$$e = \frac{\pi'}{\sin\pi}\sin(d-h)$$
$$Q = \psi + (h-e)\sin\psi\,\mathrm{tgt}\,\Delta$$
$$A^\circ = A + (h-e)\sin\psi\sec\Delta$$
$$\Delta^\circ = \Delta + (h-e)\cos\psi$$

anwende. Die Columnen für die Entfernung und ihre Reduction auf den Punkt O enthalten:

$$d-\varrho-h$$

und $-\omega.\varepsilon\varepsilon\sin\pi\,[\sin\Delta^\circ\sin(d-\varrho-h+e) - \cos\Delta^\circ\cos(d-\varrho-h+e)\cos Q]$

bei welcher Einrichtung dem Rechner die Kenntniss beider Halbmesser unnöthig wird. — Die auf diese Art abgeänderte Ephemeride des 6ten § setze ich gleichfalls hieher. Der dazu angewandte Halbmesser der Sonne ist aus der XII. Taf. der *Tabb. Regiom.* genommen. Den Ergänzungsbogen e habe ich nur in ganzen Secunden angegeben, indem nur seine

Veränderung durch die Parallaxe Einfluss auf das Resultat erhält, welcher durch die Brüche der Secunde nicht merklich geändert werden kann.

Entfernung der nächsten Ränder der Sonne und des Mondes.

W. Z. in Greenwich.	Entfernung.	Log. Veränd. für 1″	Log. Corr.	Positions-winkel.	Log. sin Hor. P.	Reduct. d. W. Z.	Verbess. Decl. der Sonne.	Ergänz-bogen.
Juni 2. 12^h	97° 11′ 45″,9	9,69782	0,907 *n*	261° 19′ 54″	8,21754	+ 31″,3	+22° 10′ 43″	8′ 28″
15	95 41 50,1	9,69944	0,914 *n*	261 14 27	8,21829	+ 31,2	11 41	8 28
18	94 11 34,1	9,70109	0,920 *n*	261 9 2	8,21905	+ 31,2	12 38	8 29
21	92 40 57,3	9,70275	0,926 *n*	261 3 37	8,21982	+ 31,2	13 35	8 29
— 3. 0	91 9 56,6	9,70444	0,932 *n*	260 58 13	8,22060	+ 31,2	14 32	8 28

Eine andere Abkürzung kann man in der Berechnung der Refraction anbringen. Dass von der im 4ten § vorausgesetzten Tafel (dieses Werkes Band I. S. 198—201.) eine Decimalstelle weggelassen werden kann, sieht man sogleich, und eben so bemerkt man leicht, dass der Factor A', welcher in den Logarithmen von β zu multipliciren ist, in der gegenwärtigen Anwendung der Tafel nicht berücksichtigt zu werden braucht; denn bei der Zenithdistanz von 80° kann er die Strahlenbrechung, in den Grenzen der Barometerstände, nicht mehr als 0″,05, und bis 85° nur um 0″,4 ändern. Der Factor λ' des von dem Thermometerstande abhängigen Logarithmen von γ erlangt aber grösseren Einfluss, der, wenn der Thermometerstand 40° Fahr. von dem Stande verschieden ist, für welchen die Tafel gilt, in den Zenithdistanzen 70°, 75°, 80°, 85° etwa 0″,1, 0″,3, 0″,8, 4″,0 beträgt.

Eine nicht ganz unbeträchtliche Erleichterung der Rechnung würde man erlangen, wenn man k ohne Rücksicht auf die Zenithdistanz des Mondes, etwa so wie es für die Zenithdistanz von 45° ist, annehmen könnte. Dann würde die Aufsuchung jener Zenithdistanz ganz erspart und man gebrauchte nur den Winkel H. Wenn der Mond hoch steht, so kömmt man hierdurch wirklich der Wahrheit sehr nahe; auchnoch für die Zenithdistanzen 55°, 60°, 65°, 70° beträgt der aus der Annahme der Unveränderlichkeit von k entstehende Fehler der Strahlenbrechung nur 0″,1, 0″,3, 0″,6, 1″,5. Man könnte daher diese Annäherung für Fälle in welchen der Mond 25° über dem Horizonte oder höher ist, anzuwenden vorschlagen, allein da sie für geringere Höhen beträchtliche Fehler erzeugen würde, und die Berechnung der Zenithdistanz, wozu man alles Erforderliche schon besitzt, nur sehr geringe Mühe verursacht, so ist es vielleicht vortheilhafter, es

bei *einer*, in allen Fällen anzuwendenden Vorschrift bewenden zu lassen. Übrigens ist, wegen der Kleinheit der Änderung, welche k durch eine Änderung der Zenithdistanz erfährt, eine ohngefähre Berechnung der letzteren hinreichend.

Über die Einwirkung der Strahlenbrechung auf Entfernungen des Mondes von der Sonne bemerke ich noch, dass nach der oben vorgeschlagenen unmittelbaren Beziehung derselben auf den Sonnenrand, der Halbmesser der Sonne aus der Formel (3^b) (§. 6.) weggelassen und ihre ersten, allein in Betracht zu ziehenden Glieder

$$D = d'' - k\,\mathrm{tgt}(d''+e'-H) - K'\,\mathrm{tgt}(H-e')$$

gelesen werden müssen. K' wird mit desto grösserem Rechte mit dem für die Zenithdistanz Z geltenden K verwechselt werden können, je kleiner der Unterschied dieser Zenithdistanz und

$$Z - e'\cos P'$$

für welche K genommen werden sollte, durch die Beziehung des Punktes Z auf den Rand der Sonne, geworden ist.

10.

Ich werde nun alle Operationen, welche man machen muss um das Resultat einer beobachteten Entfernung des Mondes von einem Fixsterne und von der Sonne oder einem Planeten zu erhalten, zusammenstellen und vollständige Rechnungsbeispiele für beide Fälle hinzusetzen. Ich richte beides den Formeln (2^a) §. 3 gemäss ein, weil nicht-logarithmische Sinustafeln allgemeiner verbreitet sind als ähnliche Tafeln für die Tangenten.

A. Entfernung des Mondes von einem Fixsterne.

Nachdem man aus der Ephemeride (§. 9.) für die Greenwicher W. Z. $= T+m$ die Zahlen ihrer 7 Columnen genommen und daraus $d_{,,}$ $\log n$, Q, $\log.\sin\pi$, und den Stundenwinkel des Sterns abgeleitet hat, berechnet man

I. den parallactischen Winkel und die Zenithdistanz des Sterns:

$$a = \cos\varphi \sin t$$

$$f\sin F = \cos\varphi\cos t \qquad \mathrm{tgt}\, Z\cos q = \mathrm{cotg}(F+\varDelta)$$

$$f\cos F = \sin\varphi \qquad \mathrm{tgt}\, Z\sin q = \tfrac{a}{f}\,\mathrm{cosec}(F+\varDelta)$$

II. die von der Parallaxe geänderte Entfernung des Mondrandes von dem Sterne d'' und den Winkel am Sterne P':

$$P_{,} = Q - q$$
$$r' \cos d'' = \cos d' - \sin\pi_{,} \cos Z$$
$$r' \sin d'' \cos(P' - P_{,}) = \sin d' - \sin\pi_{,} \sin Z \cos P_{,}$$
$$r' \sin d'' \sin(P' - P_{,}) = \sin\pi_{,} \sin Z \sin P_{,}$$

III. die scheinbare Entfernung D:

$$\operatorname{tgt} H = \operatorname{tgt} Z \cos P'$$
$$\cos z = \frac{\cos Z}{\cos H} \cos(d'' - H)$$

k und K aus z und Z und den Angaben der meteorologischen Instrumente

$$D = d'' - k \operatorname{tgt}(d'' - H) - K \operatorname{tgt} H$$

IV. den wahren Mittagsunterschied:

$$m + x = m + \frac{D' - D}{n'}$$

wobei, wenn x nicht etwa sehr gross ist, n' mit n, dessen Logarithmen die Ephemeride angiebt, verwechselt werden kann.

B. Entfernung des Mondes von der Sonne oder einem Planeten.

Die Ephemeride (§ 9.) ergiebt für die Zeit $T+m$

$$d_{,},\quad \log n,\quad Q,\quad \log.\sin\pi_{,},\quad e;$$

die Rechnung ist

I. wie vorher, nur wird sie mit der in der Ephemeride enthaltenen verbesserten Declination geführt.

II. statt $d_{,}$ wird $d_{,}+e$ angewandt, wodurch $d''+e'$ statt d'' gefunden wird; das hiervon abzuziehende e' ist

$$= e \frac{r' \sin(d'' + e')}{\sin(d_{,} + e)}$$

III. die scheinbare Entfernung D:

$$\operatorname{tgt} H = \operatorname{tgt} Z \cos P'$$
$$\cos z = \frac{\cos Z}{\cos H} \cos(d'' + e' - H)$$
$$D = d'' - k \operatorname{tgt}(d'' + e' - H) - K \operatorname{tgt}(H - e')$$

IV. wie vorher.

Die beiden Beispiele, welche ich hier folgen lasse, sind fingirt:

A. 1831 Juni 2. $14^h 24' 10''$ W. Z. ist die Entfernung *α Arietis* vom nächsten Mondrande $= 61° 19' 30''$ gemessen. Das Barometer zeigte 30,3 Engl. Zolle, das daran befindliche Thermometer 68° *F*; die Wärme der Luft war 65° *F*. Die Breite des Beobachtungsorts ist 54° 42′ 50″; sein geschätzter Mittagsunterschied $1^h 22'$ Ost von Greenwich.

Ephemeride.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
12^h …	61° 46′ 14″,4	9,71401	1,085 *n*	243° 5′ 14″	8,21754	2° 42′ 42″,0	+ 22° 39′ 25″
1^h 2′ 10″	− 32 11,4	+ 31	+ 3	− 11 0	+ 26	+ 10,6	—
	61 14 3,0	9,71432	1,088 *n*	242 54 14	8,21780	2 42 52,6	+ 22 39 25
	− 10,0	9,71417	9,912		+ 37	14 24 10,0	
$d_{,} =$	61 13 53,0	3,57171	1,000 *n*	$l \sin \pi_{,} =$	8,21877	17 7 2,6	
		3,28588			$t =$	256 45 39	

I. *q* und *Z*.

$l.\cos\varphi$	9,76167	comp. $l.f$ …	0,08253
$l.\sin t$	9,98830 *n*	$l.a$ …	9,74997 *n*
$l.\cos t$	9,35987 *n*	$l.\text{cosec}(F+\Delta)$	0,63336
$l.f \sin F$	9,12154 *n*	$l.\text{tgt}\, Z \sin q$	0,46586 *n*
$l.f \cos F$	9,91184	$l.\text{tgt}\, Z \cos q$	0,62128
$l.\text{tgt}.F$	9,20970 *n*	$l.\text{tgt}\, q$ …	9,84458 *n*
F	− 9° 12′ 21″	q	− 34 57 36
Δ	+ 22 39 25	$l.\cos q$	9,91358
$F+\Delta$	13 27 4	$l.\text{tgt}\, Z$ …	0,70770
$l.\cos F$	9,99437	Z	78 54 34

II. d'' und P'. $P_{,} = 277° 51' 50''$.

$l.\sin\pi_{,}$	8,21877	$\sin d_{,}$	0,876572
$l.\cos Z$	9,28412	2)	+ 0,002222
$l.\sin Z$	9,99181	$r' \sin d'' \cos(P'-P_{,})$	0,874350
1)	7,50289	log	9,941685
$l.\sin\pi_{,} \sin Z$	8,21058	3)	8,20648 *n*
$l.\cos P_{,}$	9,13615	$l.\text{tgt}(P'-P_{,})$	8,26480 *n*
$l.\sin P_{,}$	9,99590 *n*	$P'-P_{,}$ …	− 1° 3′ 15″
2)	7,34673	P'	276 48 35
3)	8,20648 *n*	$l.\cos(P'-P_{,})$	9,999926
$\cos d_{,}$	0,481274	$l.r' \sin d''$	9,941759
1)	+ 0,003183	$l.r' \cos d''$	9,679511
$r' \cos d''$	0,478091	$l.\text{tgt}\, d''$	0,262248
		d''	61° 20′ 3″,9

III. *D*.

$l.\mathrm{tgt}\,Z$	0,70770
$l.\cos P'$	9,07398
$l\,\mathrm{tgt}\,H$	0,78168
H	31 10 8
$d''-H$	30 9 56
$l.\cos Z$	9,28412
$l.\sec H$	0,06771
$l.\cos(d''-H)$	9,93680
$l.\cos z$	9,28863
z	78° 47′ 29″

$l.\beta = +0{,}0088;\ l.\gamma = -0{,}0136$

$l.\alpha$	1,7463		1,7460
$l(\beta\ \&\ \gamma)$	— 52		— 52
$l.k$	1,7411	$l.K$	1,7408
$l.\mathrm{tgt}(d''-H)$	9,7643	$l.\mathrm{tgt}\,H$	9,7817
	1,5054		1,5225
	32″,0		33″,3

Refraction....	— 1′ 5″,3
d''...	61 20 3,9
D...	61 18 58,6

IV. $m+x$.

$D'-D = +31'',4$, log.	1,4969	$m = -1^h\,22'\,0''$
$l.n$	9,7143 *n*	$x = -1\ 0{,}6$
	1,7826 *n*	$m+x = -1\ 23\ 0{,}6$

B. **1831. Juni 2.** 23ᵘ 8′ 45″ **W. Z. ist die Entfernung der nächsten Ränder des Mondes und der Sonne** = 96° 47′ 10″ **gemessen. Das Barometer zeigte** 29,6 **Zoll. Engl., das daran befestigte Thermometer** 88° *F;* **die Wärme der Luft war** 90° *F.* **Die Breite des Beobachtungsorts ist** 19° 31′ *N;* **der geschätzte Mittagsunterschied** $8^h\,50'$ **Ost von Greenwich.**

Ephemeride.

	I.	II.	III.	IV.	V.		VI.	VII.	VIII.
12^h	97° 11′ 45″,9	9,69782	0,907 *n*	261° 19′ 54″	8,21754		+ 31″,3	+22° 10′ 43″	8′ 28″
$2^h\,18'\,45''$	—1 9 17,4	+ 124	+ 5	— 4 11	+ 58		— 0,1	+ 44	0
	96 2 28,5	9,69906	0,912 *n*	261 15 43	8,21812		+ 31,2	+22 11 27	8 28
	— 2,7	9,69844	9,524		+ 16		23 8 45,0		
$d,$	96 2 25,8	3,92038	0,436 *n*	$l.\sin\pi,$	8,21828		23 9 16,2		
$e,$	8 28,0	3,61882				$t =$	347° 19′ 3″		
$d,+e,$	96 10 53,8								

I. q **und** Z.

$l.\cos\varphi$...	9,97430	comp. $l.f$	0,00951
$l.\sin t$	9,34153 *n*	$l.a$	9,31583 *n*
$l.\cos t$	9,98927	$l.\mathrm{cosec}(F+\Delta^0)$	0,00033
$l.f\sin F$	9,96357	$l.\mathrm{tgt}\,Z\sin q$	9,32567 *n*
$l.f\cos F$	9,52385	$l.\mathrm{tgt}\,Z\cos q$	8,58926 *n*
$l\,\mathrm{tgt}\,F$	0,43972	$l.\mathrm{tgt}\,q$	0,73641
F...	70° 2′ 0″	q	259° 36′ 11″
Δ^0...	22 11 27	$l.\sin q$	9,99281 *n*
$F+\Delta^0$	92 13 27	$l.\mathrm{tgt}\,Z$	9,33286
$l.\sin F$	9,97308	Z	12° 8′ 43″

II. d'', e' und P'. $P_{,}=1^{\circ}\,39'\,32''$

$l.\sin\pi_{,}$	8,21828
$l.\cos Z$	9,99017
$l.\sin Z$	9,32303
1)	8,20845
$l.\sin\pi_{,}\sin Z$	7,54131
$l.\cos P_{,}$	9,99982
$l.\sin P_{,}$	8,46163
2)	7,54113
3)	6,00294
$\cos(d_{,}+e_{,})$	— 0,107680
1)	+ 0,016160
$r'\cos(d''+e')$	— 0,123840

$\sin(d_{,}+e_{,})$	0,994185
2)	+ 0,003476
$r'\sin(d''+e')\cos(P'-P_{,})$	0,990709
log . . .	9,995946
3)	6,00294
$l.\mathrm{tgt}(P'-P_{,})$	6,00699
$P'-P_{,}$	0° 0′ 21″
P'	1 39 53
$l.\cos(P'-P_{,})$	0,000000
$l.r'\sin(d''+e')$	9,995946
$l.r'\cos(d''+e')$	9,092861 *n*
$l.\mathrm{tgt}(d''+e')$	0,903085 *n*
$d''+e'$	97° 7′ 30″,4
d''	96 59 4,2

$l.e_{,}$	2,7059
.	9,9959
$l.\mathrm{cosec}(d_{,}+e_{,})$	0,0025
$l.e'$	2,7043
e'	8′ 26″,2

III. D.

$l.\mathrm{tgt}\,Z$	9,33286
$l.\cos P'$	9,99982
$l.\mathrm{tgt}\,H$	9,33268
H	12° 8′ 26″
$d''+e'-H$	84 59 4
$H-e'$	12 0 0
$l.\cos Z$	9,99017
$l.\sec H$	0,00982
$l.\cos(d''+e'-H)$	8,94164
$l.\cos z$	8,94163
z . . .	84° 59′ 5″

$l.\beta=-0{,}0021,\ l.\gamma=-0{,}0337$

$l\alpha$	1,6993		1,7614
$l(\beta\ \&\ \gamma)$	— 386		— 358
$l.k$	1,6607	$l.K$	1,7256
$l.\mathrm{tgt}(d''+e'-H)$	1,0567	$l.\mathrm{tgt}(H-e')$	9,3275
	2,7174		1,0531
	8′ 41″,7		0′ 11″,3

Refraction	— 8′ 53″,0
d'' . . .	96 59 4,2
D . . .	96 50 11,2

IV. $m+x$.

$D'-D=-3'\,1'',2$. Wegen der Grösse der hieraus hervorgehenden Verbesserung des Mittagsunterschiedes, wende ich die Formel §. 9 an.

$l.\sin\pi_{,}$	8,2183	$l.k$ Arc. 1″	6,3463	$l.0{,}9724$	9,9878
$l.\cos z$	8,9416	$l.\sec(d''+e'-H)^2$	2,1167	$l.n$	9,6991 *n*
	7,1599		8,4630	$l.n'$	9,6869 *n*
	+ 0,0014		— 0,0290	$l(D'-D)$	2,2582 *n*
		x . . .	+ 6′ 12″,6		2,5713
		m . . .	— 8ʰ 50′ 0″,0		
		$m+x$	— 8 43 47,4		

11.

Indem ich meine Methode durch zwei Beispiele verfolgt habe, habe ich die Absicht gehabt, nicht allein den Gang der Rechnung, sondern auch die Arbeit welche sie fordert anschaulich zu machen. In der letzteren Beziehung bemerke ich, dass ich alle vorkommenden Zahlen hingeschrieben habe, selbst solche, welche ein einigermassen geübter Rechner nicht schreiben wird. Vergleicht man diese Arbeit mit der, welche die Anwendung der bekannten trigonometrischen Methode — der von *Dunthorne* — mit Einschluss der Berechnung beider Höhen, verursacht, so wird man einigen Vortheil auf der Seite der letzteren finden. Dieses ist zum Theil den Hülfstafeln zuzuschreiben, welche, mit den Argumenten der scheinbaren Höhe und der Horizontalparallaxe des Mondes, sowohl den Unterschied der Höhenparallaxe und Strahlenbrechung, als auch den Logarithmen des Verhältnisses der Producte der Cosinusse der scheinbaren und der wahren Höhen beider Gestirne angeben; welche Tafeln allerdings die Mühe der Rechnung bedeutend vermindern, dagegen aber auch die Berichtigung der Strahlenbrechung durch die Angaben des Barometers und Thermometers ausschliessen, deren Vernachlässigung oft, vorzüglich wenn die Gestirne niedrig stehen, oder eins von ihnen niedrig steht, einen beträchtlichen Fehler erzeugt. Dieser Ursache ist z. B. der grösste Theil des Fehlers des Resultats zuzuschreiben, welches man erhält indem man das Beispiel *B.*, nach der Anleitung zur Anwendung der *Dunthorne*schen Methode und den Tafeln berechnet, welche in *Norie Epitome of pract. navigation* (Ausgabe von 1828) gegeben sind: man findet nämlich dadurch den Mittagsunterschied $= -8^h 46' 43''$, also $-2' 56''$ Zeit fehlerhaft. Fälle, in welchen der Fehler eine Zeitminute beträgt, sind nicht ungewöhnlich. — Zum Theil ist aber auch die etwas grössere Arbeit, welche die Anwendung meiner Methode verursacht, eine Folge der Berücksichtigung in der älteren ganz vernachlässigter Umstände.

Wo das Resultat, welches man erhält ohne die Veränderlichkeit der Strahlenbrechung mit den Ständen der meteorologischen Instrumente, ohne ihre Verschiedenheit an den Mittelpunkten der Gestirne und an den beobachteten Punkten ihrer Ränder, ohne die Abplattung der Erde u. s. w. zu berücksichtigen, dem Zwecke einer Anwendung der Methode *nicht minder* entspricht, als das dieses Alles berücksichtigende Resultat, da

wird offenbar jede, durch die Erlangung des letzteren verursachte Vermehrung der Arbeit unnütz verwandt. Da die Ausführung der von mir gegebenen Vorschrift nicht kleinere, sondern etwas grössere Arbeit fordert als die Ausführung der früheren, so ist also ihr Vorzug, zum wahren Resultate der Beobachtungen zu führen, *nur* geltend wenn dieses einen grösseren Werth besitzt als das unvollkommene. Ich habe schon oben gesagt, warum ich erwarte, den grösseren Werth eines genauen Resultats, falls er auch nicht als jetzt vorhanden betrachtet werden könnte, in der Folge anerkannt zu sehen. In dieser Erwartung werde ich noch einiger Abänderungen erwähnen, welche man meiner Rechnungsmethode geben kann.

Statt der in der Zusammenstellung §. 10 und den Beispielen angewandten Formeln (2^a) würde ich die Formeln (2^b) (§. 3) gewählt haben, wenn ich den Besitz nicht-logarithmischer Tangenten-Tafeln von 10 zu 10″ gehend und 6 richtige Decimalstellen enthaltend, hätte voraussetzen wollen. Wenn solche Tafeln vorhanden sind, so wird dadurch die Berechnung des Einflusses der Parallaxe, meiner Meinung nach, so leicht als möglich gemacht. Alle anzuwendenden Logarithmen dürfen dann höchstens 5 Decimalstellen besitzen. — Man braucht aber die erwähnten Tangententafeln nicht vorauszusetzen und kann dennoch mit 5 Decimalstellen der Logarithmen ausreichen, wenn man P' und d' durch aufeinanderfolgende Näherungen berechnen will. Die dazu nöthigen Formeln findet man aus den im 3ten § gegebenen: zuerst

$$0 = \sin d_, \sin(P'-P_,) - \sin\pi_, \sin Z \sin P'$$

oder

$$\sin(P'-P_,) = \frac{\sin\pi_, \sin Z \sin P'}{\sin d_,}$$

wodurch man, indem man, rechts von dem Gleichheitszeichen, das gegebene $P_,$ statt P' setzt, eine Näherung an $P'-P_,$, also auch an P' findet, deren Anwendung eine grössere Näherung ergiebt. Diese ist, da die Methode nie auf sehr kleine (die Convergenz vermindernde) Entfernungen des Mondes von anderen Gestirnen angewandt wird, in allen vorkommenden Fällen der Wahrheit schon *hinreichend* nahe. Ferner kann auch d' auf ähnliche Art berechnet werden: die zweite der Formeln (2^b) ergiebt

$$\sin(d'-d_,) = g \sin\pi_, \sin(d'-G)$$

worin man Anfangs, rechts von dem Gleichheitszeichen, $d_,$ statt d' anwendet und die dadurch gefundene Näherung an $d'-d_,$, also auch an d',

zu einer ferneren Näherung benutzt u. s. w. Auch kann man die Rechnung so einrichten, dass sie denselben Hülfswinkel H benutzt, welcher auch bei der Berechnung des Einflusses der Strahlenbrechung angewandt wird, wodurch dann die Aufsuchung von g und G unnöthig wird. Aus den Formeln (2^a) des 3^ten § erhält man

$$r' \cos d' = \cos d_, \qquad\qquad - \sin \pi_, \cos Z$$
$$r' \sin d' = \sin d_, \cos(P'-P_,) - \sin \pi_, \sin Z \cos P'$$

oder, wenn man

$$c \cos(d_,) = \cos d_, \qquad\qquad h \cos H = \cos Z$$
$$c \sin(d_,) = \sin d_, \cos(P'-P_,) \quad h \sin H = \sin Z \cos P'$$

setzt,

$$r' \cos d' = c \cos(d_,) - \sin \pi_, h \cos H$$
$$r' \sin d' = c \sin(d_,) - \sin \pi_, h \sin H$$

woraus, durch Elimination von r':

$$\sin(d'-(d_,)) = \frac{h \sin \pi_,}{c} \sin(d'-H)$$

folgt. Diese Formel ist der früher gegebenen ganz analog und kann daher in gleicher Art zur Erfindung von d' angewandt werden. Indessen ist

$$c = \sqrt{[1 - \sin d_,^2 \sin(P'-P_,)^2]}$$

oder, wenn man für $\sin d_, \sin(P'-P_,)$ seinen Ausdruck schreibt,

$$c = \sqrt{[1 - \tfrac{1}{r_,^2} \sin \pi_,^2 \sin Z^2 \sin P'^2]}$$

nicht kleiner als $\cos \pi_,$ und nicht grösser als 1, wesshalb es, da es nur als Divisor von $\sin \pi_,$ vorkommt, ohne erheblichen Nachtheil mit 1 verwechselt werden, oder unberücksichtigt bleiben kann. Die Grösse $(d_,)$ kann durch Reihenentwickelung berechnet werden: man hat nämlich

$$\operatorname{tgt}(d_,) = \operatorname{tgt} d_, \cos(P'-P_,)$$

woraus bekanntlich folgt:

$$(d_,) = d_, - \operatorname{tgt} \tfrac{1}{2}(P'-P_,)^2 \sin 2d_, + \tfrac{1}{2} \operatorname{tgt} \tfrac{1}{2}(P'-P_,)^4 \sin 4d_, - \&c.$$

in welcher Reihe aber schon das in $\sin 4d_,$ multiplicirte Glied unerheblich wird. Auch kann $(d') - d_,$ in eine Tafel gebracht werden, deren Argumente $P'-P_,$ und $d_,$ sind. Eine solche Tafel hat *Schumacher* unter die Hülfstafeln aufgenommen, welche er zur Erleichterung der Anwendungen der gegenwärtigen Methode hat drucken lassen *). Indessen fordern die jetzt betrachteten Arten d' zu berechnen, nicht die Aufsuchung von r',

*) Auxiliary Tables for Mr. Bessels method of clearing the Distances.

wodurch nothwendig wird, auch seine Anwendung zur Berechnung von e' zu vermeiden. Dieses geschieht indem man den Ausdruck

$$e' = e_, \frac{r' \sin(d'+e')}{\sin(d_,+e_,)}$$

in (§. 3)

$$e_, \left[1 - \frac{\sin\pi_, \sin Z \cos\frac{1}{2}(P'+P_,)}{\sin(d_,+e_,) \cos\frac{1}{2}(P'-P_,)}\right]$$

oder, ohne erheblichen Fehler, in

$$e_, \left[1 - \frac{\sin\pi_, \sin Z \cos P'}{\sin(d_,+e_,)}\right] = e_, \left[1 - \frac{\sin\pi_, h \sin H}{\sin(d_,+e_,)}\right]$$

umformt, also nach der Formel

$$e' = e - e \frac{\sin\pi_, h \sin H}{\sin(d_,+e)}$$

rechnet, in welcher e, statt des unerheblich davon verschiedenen $e_,$ geschrieben ist.

Zum Schlusse bemerke ich noch, dass man dasselbe Resultat, welches die in dieser Abhandlung erläuterte Methode durch ihre Beziehung auf den Rand des Mondes ergiebt, auch durch Befolgung der bisher gewöhnlichen Berechnungsart erlangen kann, wenn man zur Berechnung der Zenithdistanz des Mondes die Rectascension und Declination nicht seines Mittelpunkts, sondern des in der Richtung nach dem verglichenen Gestirne liegenden Punkts seines Randes anwendet; auch, falls das verglichene Gestirn die Sonne ist, ihren Ort gleichfalls auf ihren Rand bezieht. Die Rechnung wird aber, falls man nicht auf die Verbesserung der Strahlenbrechung durch den Barometer- und Thermometerstand Verzicht leisten will, weniger kurz als die vorgetragene; auch wird die Ephemeride weniger kurz und ihre Anwendung weniger bequem.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Verbesserung des Logarithmen des Sinus der Horizontal-Parallaxe.

Argument *Polhöhe.*

Arg.		Arg.		Arg.	
0°	0,00000	30°	0,00036	60°	0,00109
1	00000	31	00038	61	00111
2	00000	32	00041	62	00113
3	00000	33	00043	63	00115
4	00001	34	00045	64	00117
5	00001	35	00048	65	00119
6	00002	36	00050	66	00121
7	00002	37	00052	67	00123
8	00003	38	00055	68	00125
9	00004	39	00057	69	00126
10	00004	40	00060	70	00128
11	00005	41	00062	71	00130
12	00006	42	00065	72	00131
13	00007	43	00067	73	00133
14	00008	44	00070	74	00134
15	00010	45	00072	75	00135
16	00011	46	00075	76	00136
17	00012	47	00077	77	00138
18	00014	48	00080	78	00139
19	00015	49	00082	79	00140
20	00017	50	00085	80	00141
21	00019	51	00087	81	00141
22	00020	52	00090	82	00142
23	00022	53	00092	83	00143
24	00024	54	00095	84	00143
25	00026	55	00097	85	00144
26	00028	56	00100	86	00144
27	00030	57	00102	87	00145
28	00032	58	00104	88	00145
29	00034	59	00106	89	00145
30	00036	60	00109	90	00145

Druckfehler.

S. 102	Z. 26	statt	Tafeln der . . , . .	lese man	Tafeln oder
- 143	- 34	-	$(1-ee\cos d)^2$	—	$(1-ee\cos d^2)$
- 147	- 25	-	allen	—	allein
- 166	- 19	-	zu	—	zu der
- 176	- 32	-	$P'-\theta$	—	$P'-\theta'$
- 182	- 2	-	0,8141467	—	0,8148467

\- 206 Columne für μ': alle vier Angaben sind einen halben Grad zu verkleinern.

- —	Z. 12	statt	t. 15° 0′ 27″,84 . . .	—	t. 15° 2′ 27″,84

Fuchs

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Bessel, Friedrich Wilhelm,

Astronomische Untersuchungen

Bd.: 2

Königsberg in Pr. (1842)

4 Astr.u. 27 s-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10049316-4